

Technische Universität München
Fakultät für Mathematik

**Simulation inkompressibler instationärer
Fluide unter Berücksichtigung
physikalischer Erhaltungssätze in der
Diskretisierung**

Diplomarbeit von Verena Obler

Aufgabensteller : Univ.-Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Betreuer : Dr. Miriam Mehl
Dipl.-Tech.Math. Tobias Neckel
Dipl.-Inf. Tobias Weinzierl
Abgabetermin : 1.Juni 2007

Ich erkläre hiermit, dass ich die Diplomarbeit selbstständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe.

Neuried, den 19. September 2007

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Problemstellung	1
1.2	Aufbau der Arbeit	2
1.3	Danksagung	3
2	Abgrenzung der Aufgabe	5
2.1	Strömungseigenschaften	5
2.2	Randbedingungen	6
2.3	Testszenarien	8
2.3.1	Nischenströmung	9
2.3.2	Freier Kanal	12
2.3.3	Kanal mit Zylinder	14
3	Physikalische Erhaltungssätze	17
3.1	Massenerhaltung	17
3.2	Impulserhaltung	18
3.3	Energieerhaltung	20
4	Navier-Stokes Gleichungen	23
4.1	Allgemeines zu den Navier-Stokes Gleichungen	23
4.2	Dimensionslose Form der Navier-Stokes Gleichungen	25
4.3	Diskrete Form der Navier-Stokes Gleichungen	26
5	Lösungsverfahren für die Navier-Stokes Gleichungen	29

5.1	Druck-Poissongleichung	29
5.1.1	Kontinuierliche Druck-Poissongleichung	29
5.1.2	Diskrete Druck-Poissongleichung	30
5.2	Anwendung Finite-Element-Methode auf Navier-Stokes Gleichungen	32
5.2.1	Gitterwahl	32
5.2.2	Allgemeine Diskretisierung	33
5.3	Ansatzfunktionen	36
5.3.1	Bilineare Ansatzfunktionen	37
5.3.2	Divergenzfreie Ansatzfunktionen	38
5.4	Lokale diskrete Terme	42
5.4.1	Lokale Divergenzmatrix \mathbf{M}	43
5.4.2	Matrizen der bilinearen Ansatzfunktionen	44
5.4.3	Matrizen der divergenzfreien Ansatzfunktionen	46
5.5	Zeitschrittweite	48
5.6	Rand- und Anfangsbedingungen	49
5.6.1	Randbedingungen für den Druck	49
5.6.2	Anfangsbedingungen	50
5.7	Lösungsalgorithmus	50
6	Numerische Durchführung und Test auf Konsistenz	53
6.1	Globale Darstellungsform der diskreten Terme	53
6.2	Matrixeigenschaften	57
6.2.1	Matrix \mathbf{Q}	58
6.2.2	Matrix \mathbf{A}	59
6.2.3	Matrix \mathbf{D}	60
6.2.4	Matrix $\mathbf{C}(\mathbf{u})$	60
6.2.5	Term \mathbf{F}	63
6.3	Massenerhaltung	64
6.4	Impulserhaltung	65

6.5	Energieerhaltung	66
6.5.1	Herleitung der Formel	67
6.5.2	Formel für \mathbf{f}	68
6.5.3	Herleitung der dazugehörigen Massenmatrix am Rand . .	69
6.5.4	Invertieren der Massenmatrix	72
6.5.5	Überprüfen der Resultate	73
7	Bewertung des Erreichten	87
7.1	Zusammenfassende Einordnung der Ergebnisse	87
7.2	Ausblick	89
A	Erklärung der Zeichen und Abkürzungen	91
B	Mass lumping der Massenmatrix A	95
C	Beispielmatrizen in ihrer globalen Darstellung	97
C.1	Matrizen für eine 3×3 Nischenströmung	97
C.2	Matrizen für einen 3×3 Freien Kanal	98
C.2.1	Beispiele für divergenzfreie Ansatzfunktionen	98
C.2.2	Beispiele für bilineare Ansatzfunktionen	102
D	Kraft-Tabellen	103

INHALTSVERZEICHNIS

Kapitel 1

Einführung

1.1 Problemstellung

In vielen Anwendungsbereichen, wie in der Physik oder dem Maschinenbau ist es hilfreich, wenn man das Verhalten von Flüssigkeiten oder Gasen numerisch simulieren kann, statt dieses experimentell herauszufinden. Oft wäre es auch zu teuer und teilweise auch unmöglich physikalische Tests durchzuführen. Man denke beispielsweise an einen Windkanal für Flugzeuge, um deren Flugverhalten zu überprüfen.

Vorliegend wird allein das Strömungsverhalten von inkompressiblen Fluiden in einem endlichen zweidimensionalen Gebiet betrachtet bzw. simuliert. Diese Problemstellung wird durch die Navier-Stokes Gleichungen als mathematisches Modell formuliert.

In dieser Diplomarbeit wird die Finite-Element-Methode auf ein Strömungsproblem angewendet. Dabei wird ein Raum neuartiger Ansatzfunktionen untersucht. Dieser Raum wird speziell im Hinblick auf die physikalischen Erhaltungssätze konzipiert, um deren Erfüllung bei der Lösung der Gleichungen zu gewährleisten. Unter diesen Vorgaben werden die numerischen Gleichungen aufgestellt und gelöst. Die gewonnenen Ergebnisse werden abschließend diskutiert.

1.2 Aufbau der Arbeit

Zu Beginn der Arbeit wird die Aufgabenstellung im Rahmen der Strömungsmechanik präzisiert (zweites Kapitel). Dazu gehören neben den Strömungseigenschaften auch die Randbedingungen, die für die Simulation unablässlich sind. Des Weiteren werden die in dieser Arbeit verwendeten Szenarien mit ihren Strömungsverhalten dargestellt.

Im anschließenden, dritten Kapitel werden die Erhaltungssätze, die bei der Strömungssimulation der hier gegebenen inkompressiblen Fluiden erreicht werden sollen, diskutiert. Dazu gehören die Massen-, Impuls- und die Energieerhaltung.

Die unserer Simulation zu Grunde liegenden Differentialgleichungen, Navier-Stokes Gleichungen genannt, werden in unterschiedlichen Darstellungsformen im vierten Kapitel erläutert.

Es folgen die notwendigen Grundlagen für den Lösungsalgorithmus (fünftes Kapitel). Hier sind die Druck-Poissongleichung mit ihren Randbedingungen sowie die in der numerischen Berechnung Anwendung findenden Ansatzfunktionen der Finite-Element-Methode und die dazugehörige Aufstellung der Terme der diskretisierten Navier-Stokes Gleichungen von besonderer Bedeutung.

Es schließt sich die experimentelle Überprüfung der theoretischen Ergebnisse an (sechstes Kapitel). Die hierzu vorgenommenen Tests erstrecken sich auf die Eigenschaften und Richtigkeit der Matrizen der diskreten Navier-Stokes Gleichungen. Weiter werden die Testszenarien mit den unterschiedlichen Ansatzfunktionen im Blick auf die Erfüllung der Erhaltungssätze getestet und verglichen. Auf die Berechnungsformel für die Energieerhaltung wird dabei näher eingegangen.

Das siebte Kapitel fasst als Ergebnis zusammen, dass die miteinander verglichenen Ansatzfunktionen der Finite-Element-Methode die in unseren, sich im Stationären befindenden, Testbeispiele zu Grunde gelegten Erhaltungssätze erfüllen.

1.3 Danksagung

An dieser Stelle möchte ich allen danken, die direkt oder indirekt zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Besonderer Dank geht an meine zwei unmittelbaren Betreuer:

Herr Tobias Neckel war für den praktischen Teil meiner Arbeit eine große Stütze und für die dabei aufgetretenen theoretischen und praktischen Fragen immer ansprechbar.

Ebenso danke ich meinem zweiten Betreuer, Herrn Tobias Weinzierl, dessen Fachwissen und zielführende Rückmeldungen gleichfalls wesentlich für den Fortgang der Diplomarbeit waren.

Weiter danke ich allgemein auch den anderen Mitarbeitern des Lehrstuhls für die freundliche Aufnahme und die hier möglichen zur Verfügung gestellten Arbeitsbedingungen.

Mein Dank gilt auch der Familie und den Freunden, die immer ein freundliches Arbeitsumfeld gesorgt haben.

Kapitel 2

Abgrenzung der Aufgabe

Strömungen mit numerischen Verfahren zu simulieren, ist in der Regel kompliziert und noch immer ein wichtiges Thema der Strömungslehre. In dieser Arbeit sollen zwei Ansätze der Finite-Element-Methode für die numerische Simulation von inkompressiblen Fluiden verglichen werden. Dazu wird die Strömung eines solchen Fluids in einfachen Szenarien betrachtet.

2.1 Strömungseigenschaften

Fluide sind Gase oder Flüssigkeiten. Reale Fluide bewegen sich *viskos*, was bedeutet, dass innere Reibungskräfte auftreten. Denn schieben sich die Schichten des Fluids aneinander vorbei, entstehen intermolekulare Kräfte. Die Viskosität kann sehr unterschiedlich sein: Honig ist beispielsweise sehr zähflüssig, d.h. die einzelnen Honigpartikel sind sehr stark aneinander gebunden und werden somit durch die inneren Reibungskräfte stark gebremst. Diese Eigenschaft des Honigs lässt sich als große Viskosität beschreiben. Wasser hingegen, einmal in Bewegung gebracht, hat eine geringere innere Reibung und kann deshalb den Fluss viel länger beibehalten. Die dazugehörige Viskosität ist somit ziemlich klein. Vernachlässigt man die Viskosität, also die innere Reibung, spricht man von einem *idealen* Fluid.

Vielfach werden unterschiedliche Fluidmodelle eingesetzt:

- *Inkompressible Fluide* haben eine unveränderliche Dichte. Normalerweise hängt die Dichte von den thermodynamischen Variablen ab, aber in vielen Fällen ist diese Abhängigkeit vernachlässigbar gering. Wasser etwa ändert seine Dichte unter Druck nur wenig. Inkompressibilität vereinfacht die Gleichungen beträchtlich.
- Ein Fluid ist ein *Newtonsches Fluid*, wenn die auftretende Spannung proportional zur Verzerrung der Flüssigkeitselemente ist. Der Proportionalitätsfaktor entspricht der Viskosität des Fluids. Die Viskosität hängt dann nur von den thermodynamischen Variablen ab, nicht aber von der Bewegung des Fluids ([Schlichting 06, Zienkiewicz 05]).

Weiterhin kann die Flussweise viskoser Fluide unterschieden werden. Zum einen gibt es die *laminare* Strömung, bei der das Fluid sanft und geordnet fließt, zum anderen die *turbulente* Strömung, bei der es schwieriger ist, Vorhersagen zu treffen.

Ein nichtviskoses, inkompressibles Fluid wäre mathematisch am einfachsten zu behandeln. Physikalisch gesehen bedeutet das, dass das Fluid einer Formveränderung keinen inneren Widerstand leistet. Die Gleichungen dazu sind als die Euler-Gleichungen bekannt ([Batchelor 00, Schlichting 06]).

In dieser Arbeit wird allerdings ausschließlich mit viskosen Fluiden gearbeitet, so dass die Euler-Gleichungen hier nicht relevant sind. In den Strömungssimulationen wird immer von einem inkompressiblen Newtonschen Fluid ausgegangen.

2.2 Randbedingungen

Wir gehen von der *Eulerschen* Sichtweise aus ([Panton 05]), welche das Fluid in ortsfesten Koordinaten beschreibt. Das bedeutet, dass wir ein fest vorgeschriebenes nicht veränderbares Gebiet Ω vorliegen haben, in dem der Fluss des Fluids stattfindet. Dieses Gebiet ist durch Wände und eventuell auch durch Ein- und Ausströmungsöffnungen begrenzt. Der Rand von Ω wird mit $\partial\Omega$ oder gleicher Weise mit Γ bezeichnet. Befindet man sich, wie in unserem Fall, im Zweidimensionalen, wird das Geschwindigkeitsfeld des Fluids als $\mathbf{u}(x_1, x_2, t)$ notiert,

welches die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von den Dimensionsrichtungen eines zweidimensionalen Szenarios x_1, x_2 und der Zeit t zeigt. Im Folgenden wird diese Größe als \mathbf{u} geschrieben.

Die einzelnen Randbereiche legen Bedingungen für die Geschwindigkeit des Fluids fest. Diese Randbedingungen müssen der Inkompressibilität des Fluids genügen¹. Ansonsten handelt es sich um ein unphysikalisch gestelltes Problem.

- Der *No-Slip*-Fall: In diesem Fall wird angenommen, dass das Fluid an den festen, undurchlässigen Wänden haftet und sich somit in deren Nähe im Ruhestand befindet. Für die mathematische Darstellung möchte ich den Geschwindigkeitsvektor \mathbf{u} in u_n , der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Rand (Normalenrichtung), und in $u_{\perp n}$, der Geschwindigkeitskomponente parallel zum Rand (Tangentialrichtung), unterteilen. Nun werden ausschließlich die Gitterpunkte am Rand betrachtet. So gilt für den No-Slip-Fall:

$$u_n(x_1, x_2, t)|_{\Gamma} = 0 \quad \text{und} \quad u_{\perp n}(x_1, x_2, t)|_{\Gamma} = 0$$

Dies entspricht - mathematisch gesehen - einem homogenen Dirichletrand. Kurz geschrieben sieht diese Bedingung wie folgt aus:

$$\mathbf{u}|_{\Gamma} = 0 \tag{2.1}$$

Im Allgemeinen gibt es auch den inhomogenen Dirichletrand, wozu die *Einströmbedingungen* zählen. Dabei ist dann auf der rechten Seite der Gleichung ein Term \mathbf{w} ungleich Null gegeben. Für die vorliegende Arbeit wird ein Dirichletrand, unabhängig davon ob homogen oder inhomogen, mit Γ_D gekennzeichnet.

- Die *Ausströmbedingung* legt fest, dass sich die einzelnen Geschwindigkeitskomponenten in der Richtung senkrecht zum Rand nicht ändern. Dies wird mathematisch durch die Ableitung der Komponenten in Normalenrichtung dargestellt und nennt sich Neumann-Randbedingung:

$$\frac{\partial u_n(x_1, x_2, t)}{\partial n}|_{\Gamma} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u_{\perp n}(x_1, x_2, t)}{\partial n}|_{\Gamma} = 0$$

¹Ein Beispiel dafür sind die Anfangsbedingungen, die divergenzfrei sein müssen.

bzw.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n}|_{\Gamma} = 0 \quad (2.2)$$

Dabei kennzeichnet n die Normale. Natürlich entsprechen die Gleichungen wieder dem homogenen Fall. Man kann durch Austauschen der Null auf der rechten Seite mit einem anderen Term das Ganze zu einem inhomogenen System umformen. Ränder, die eine der Neumann-Randbedingungen erfüllen sollen, werden mit Γ_N notiert.

Für einen späteren Teil in dieser Arbeit sei noch eine weitere Darstellung dieser Randbedingungen gezeigt. Hierbei wird das Ganze als Kraftbedingungen am Rand betrachtet und sieht im Allgemeinen wie folgt aus:

$$\mu \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{p} \mathbf{n} = \vec{F}. \quad (2.3)$$

Dabei steht μ für die dynamische Viskosität des Fluids, \mathbf{n} für den Normalenvektor und \mathbf{F} für die tatsächliche physikalische Kraft am Rand. Da diese Kraft meist nicht bekannt ist, wird die Bedingung vereinfacht, indem der Term $(\nabla \mathbf{u})^T$ vernachlässigt wird und somit eine Pseudokraft \mathbf{f} berechnet wird:

$$\mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{p} \mathbf{n} = \vec{f}. \quad (2.4)$$

Aufgeteilt in ihren Normalen- und Tangentialanteil, f_n und $f_{\perp n}$, sieht diese wie folgt aus:

$$\mu \frac{\partial u_n}{\partial n} - \mathbf{p} = f_n \quad (2.5)$$

$$\mu \frac{\partial u_{\perp n}}{\partial n} = f_{\perp n}. \quad (2.6)$$

Es sei noch erwähnt, dass es des Weiteren noch periodische Randbedingungen und Free-Slip-Randbedingungen gibt, auf die wir jedoch nicht näher eingehen wollen ([Griebel 95]).

2.3 Testszenarien

Die Differentialgleichungen der Strömungsmechanik sollen mit der Methode der Finiten Elemente gelöst werden. Bei der Anwendung dieser Methode geht es vor

allem um die Zielvorgabe, dass die physikalischen Erhaltungssätze von vorne herein erfüllt sein sollen. Um dies zu überprüfen, empfiehlt es sich, vorerst möglichst einfache Testszenarien anzuwenden. Wird mit diesen Szenarien das gewünschte Ziel erreicht, kann man auf kompliziertere Fälle übergehen. Die vorliegende Arbeit geht von zwei einfachen Szenarien aus, der *Nischenströmung* (*Driven Cavity*) und dem *freien Kanal* (*Free Channel*). Abschließend wird noch beim *Kanal mit Zylinder* (*channel with cylinder*) untersucht, ob auch hier die physikalischen Erhaltungssätze erfüllt sind.

2.3.1 Nischenströmung

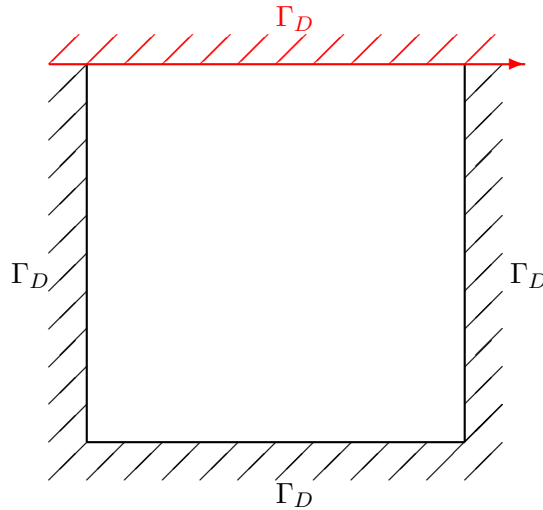


Abbildung 2.1: Darstellung der Geometrie einer zweidimensionalen Nischenströmung

Bei dem *Nischenströmungsszenario* handelt es sich um eine, meist quadratische Fläche² mit festen Wänden an drei Kanten, gefüllt mit einem Fluid und einer beweglichen Wand als vierte Kante. Diese Wand bewegt sich kontinuierlich über die Konstruktion hinweg und setzt somit die Flüssigkeit in Bewegung. Es gibt deshalb weder eine Ein- noch eine Ausströmung. Es gilt überall der No-Slip-Fall, also die Dirichlet-Randbedingungen. In Abbildung 2.1 ist eine Skizze dieses Sachverhaltes dargestellt. Bei der sich bewegenden Wand liegen inhomogene Dirichlet-Randbedingungen zu Grunde. Diese werden in den meisten

²Im Dreidimensionalen ist es ein hohler Würfel.

Tests mit einer konstanten Geschwindigkeit belegt. Alternativ kann \mathbf{u} von außen nach innen an der sich bewegenden Wand größer werden. Am Äußeren der Wand herrscht die Geschwindigkeit Null. Es folgt die halbe Maximalgeschwindigkeit und der Rest ist wieder mit der Maximalgeschwindigkeit belegt.

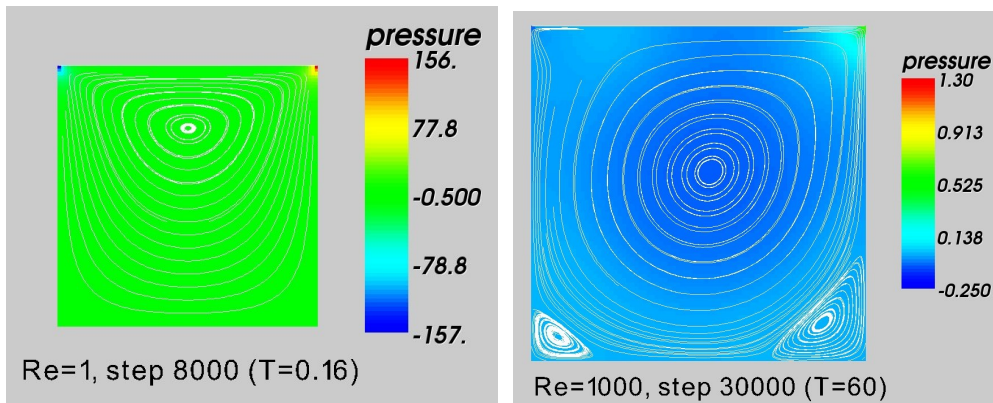
In den Abbildungen 2.3, 2.4 und 2.5 sind vier Rechnungen der Nischenströmung zu sehen. Sie befinden sich alle im stationären Zustand, d.h. es tritt keine sichtbare Änderung bei der Geschwindigkeit und dem Druck auf. Der in den Abbildungen angegebene Parameter Re ist die sogenannte Reynolds-Zahl. Diese charakterisiert in der Simulation das Fluid, bestimmt somit dessen Viskosität. Je kleiner Re , desto zähflüssiger ist das Fluid und umgekehrt.

In Abbildung 2.3 sieht man Strömungssimulationen für ein Nischenströmungsszenario mit konstanter Einströmgeschwindigkeit mit Fluiden unterschiedlicher Viskosität. Der farbige Hintergrund gibt die Druckwerte an, während die weißen Strömungslinien den Flussverlauf des Fluids anzeigen.

Die Abbildung 2.4 ist mit einem anderen Programm simuliert und somit auch etwas anders dargestellt. Es handelt sich wiederum um ein Nischenströmungsszenario, allerdings mit einer nicht-konstanten Einströmgeschwindigkeit. Das linke Bild zeigt die Druckwerte an, während die Pfeile im rechten Bild das Strömungsfeld des entsprechenden Szenarios angeben.

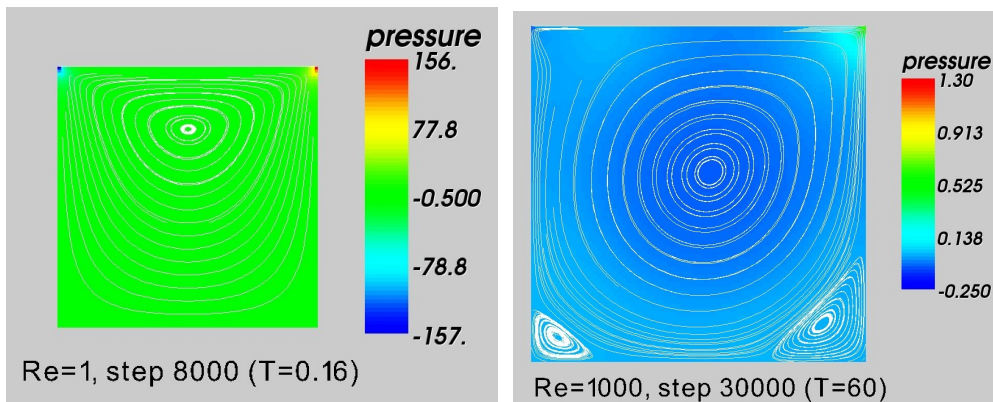
Abbildung 2.5 zeigt schließlich weitere Werte für ein Nischenströmungsszenario mit nicht-konstanter Einströmgeschwindigkeit. Die Graphiken sind wie die in Abbildung 2.4 zu interpretieren. Allerdings handelt es sich hier um ein Fluid mit wesentlich niedrigerer Viskosität.

In den Bildern mit den sehr zähflüssigen Fluiden ($Re = 1$) ist zu erkennen, dass eine Symmetrie zur Normalenrichtung bei den weiß gekennzeichneten Strömungslinien bzw. dem durch Pfeilen dargestellten Strömungsfeld auftritt. Bis auf die Werte an den oberen beiden Ecken ist der Druck überall sehr ähnlich. Wenn man die Werte in diesen speziellen Ecken betrachtet, erkennt man, dass der eine Druck genau das Gegenstück zu dem anderen Druck darstellt. Da es sich um ein sehr zähflüssiges Fluid handelt, ist es auch verständlich, dass im unteren Bereich des Quadrates weniger Aktivität herrscht.



Quelle: [Neckel 08]

Abbildung 2.2: Nischenströmungsmodelle mit konstanter Anfangsgeschwindigkeit für unterschiedliche Fluide ($Re = 1$ und $Re = 1000$).



Quelle: [Neckel 08]

Abbildung 2.3: Nischenströmungsmodelle mit konstanter Anfangsgeschwindigkeit für unterschiedliche Fluide ($Re = 1$ und $Re = 1000$).

Bei den Bildern für Flüssigkeiten mit der Reynoldszahl 1000 verschiebt sich die Rotation mehr in die Mitte des Modells. Dabei ist die Symmetrie von vorher nicht mehr zu erkennen. Im oberen Bereich ziehen sich die Strömungslinien mehr nach rechts und in den unteren Ecken bilden sich eigene rotierende Strömungen.

Vergleicht man die Ergebnisse, die man mit den unterschiedlichen Anfangsgeschwindigkeiten erhält, stellt man so gut wie keinen Unterschied fest. Dieser ist wohl nur zu erkennen, wenn man sich noch nicht im stationären Zustand befindet. Bei der Nischenströmung kann es stationär zu einem oder mehreren

Wirbeln kommen.

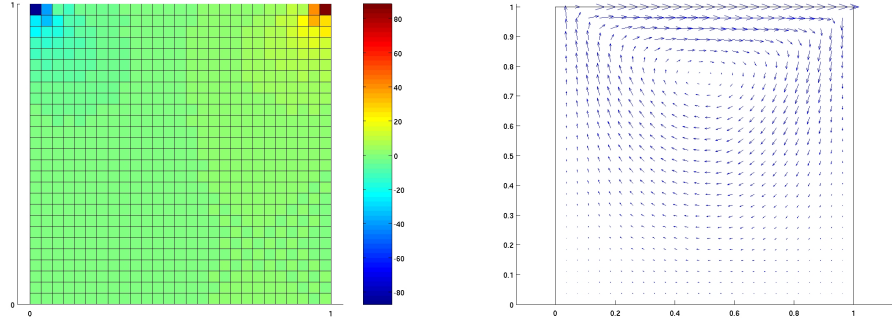


Abbildung 2.4: Nischenströmungsmodelle mit nicht konstanter Anfangsgeschwindigkeit für ein Fluid mit $Re = 1$

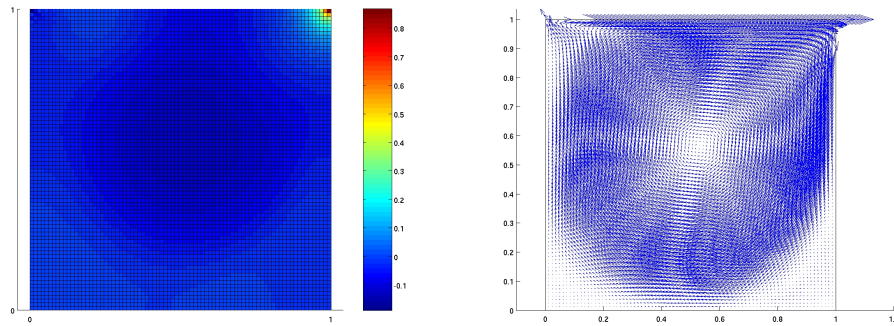


Abbildung 2.5: Nischenströmungsmodelle mit nicht konstanter Anfangsgeschwindigkeit für ein Fluid mit $Re = 1000$.

2.3.2 Freier Kanal

Ein weiteres Szenario dieser Diplomarbeit ist der *freie Kanal*. Dieser kann quadratisch, aber auch rechteckig sein. Es gibt an zwei gegenüberliegenden Seiten undurchlässige Wände, welche die homogenen Dirichlet-Randbedingungen erfüllen. Links kann das Fluid einfließen. Deshalb liegen auf dieser Seite Einstrombedingungen zu Grunde, welche mit den inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen modelliert werden. Auf der rechten Seite strömt das Fluid wieder aus und beruht dort somit auf den Neumann-Randbedingungen, wie in Abbildung 2.6 zu sehen ist.

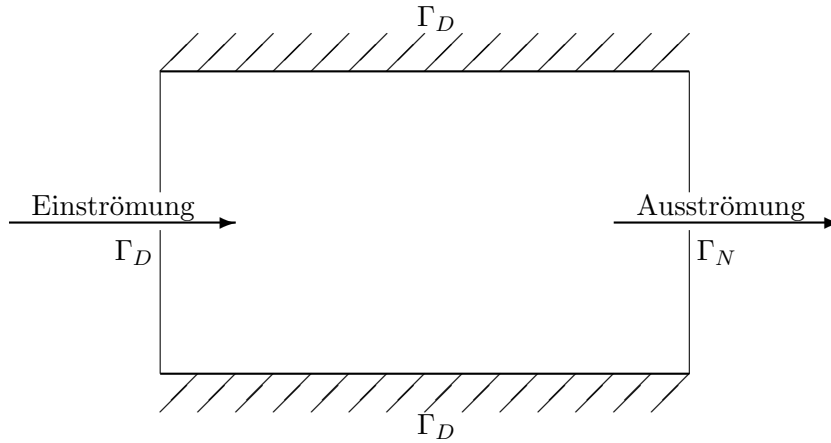
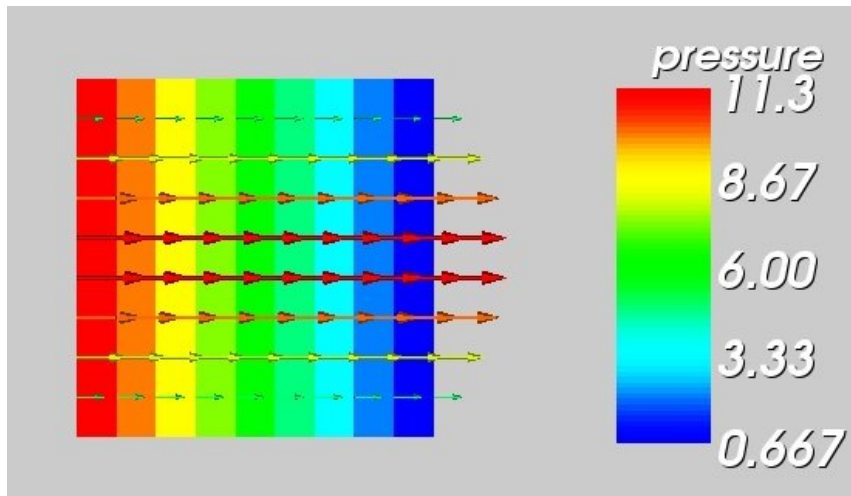


Abbildung 2.6: Darstellung der Geometrie eines zweidimensionalen freien Kanals

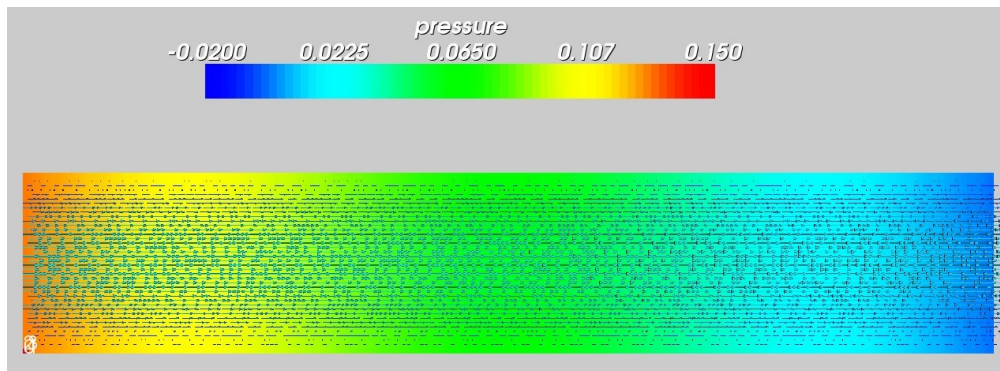
Aufgrund der Viskosität des Fluids wird in der Simulation eine parabolische Rohrströmung nach Hagen-Poiseuille erwartet [Batchelor 00, Laschka 01]. Weiterhin ist aus experimentellen Untersuchungen in der Fluidmechanik bekannt, dass der Druck bei einer laminaren inkompressiblen Strömung im Kanal linear mit der Lauflänge abfällt, die Geschwindigkeit hingegen erhalten bleibt [Laschka 01].

Verteilt man die Einstömungsgeschwindigkeit im freien Kanal konstant, wie bei der Nischenströmung geschehen, entstehen am Einlass Durcksingularitäten, die mit der erwarteten analytischen Lösung nicht übereinstimmen. Deshalb betrachten wir ausschließlich Kanäle mit einer parabelförmigen Einflussgeschwindigkeit, die den linearen Druckabfall in der Simulation erreichen. In den Abbildungen 2.7 und 2.8 sind freie Kanal Szenarien mit unterschiedlichen Fluiden dargestellt. Die farbige Unterlegung stellt die Druckwerte dar und die farbigen Pfeile das Geschwindigkeitsfeld. In beiden Abbildungen verhalten sich die Geschwindigkeit und der Druck wie in der vorher beschriebenen analytischen Lösung. Der Druck fällt und die Geschwindigkeit bleibt gleich, was auch den gewünschten parabolischen Ausfluss zur Folge hat.



Quelle: [Neckel 08]

Abbildung 2.7: Modell eines freien Kanals für ein Fluid mit $Re = 1$.



Quelle: [Neckel 08]

Abbildung 2.8: Modell eines freien Kanals für ein Fluid mit $Re = 20$.

2.3.3 Kanal mit Zylinder

Ein letztes hier betrachtetes Szenario ist der Kanal mit Zylinder. In Abbildung 2.9 kann man erkennen, dass der einzige Unterschied zum freien Kanal der zwischen den beiden festen Wänden zentrierte Zylinder (bzw. die Kreisscheibe) ist. Die Rand- und Anfangsbedingungen haben sich nicht geändert. Dieser sich nicht bewegende Gegenstand nimmt jedoch gewaltigen Einfluss auf das Strömungsverhalten. Aus diesem Grund wird der Kanal mit Zylinder oft als Prüfstein für die Güte eines Lösungsverfahrens verwendet.

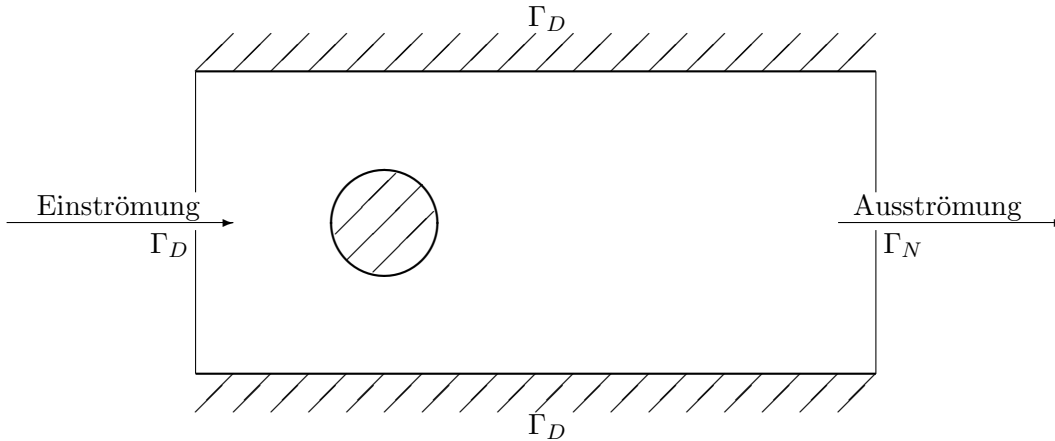
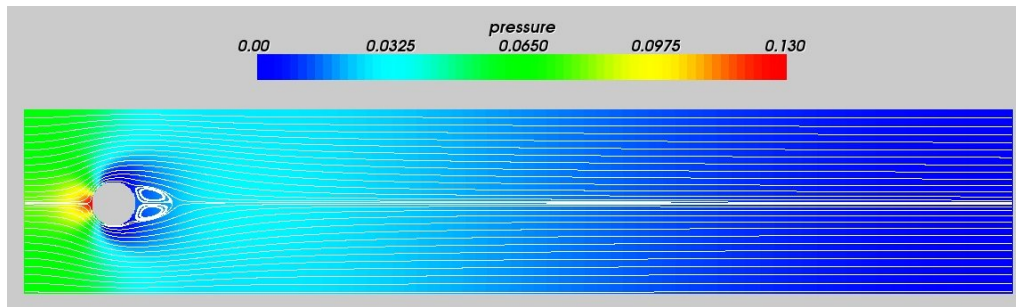


Abbildung 2.9: Darstellung der Geometrie eines zweidimensionalen Kanals mit Zylinder

Die Resultate, die man in einem Kanal mit Zylinder für unterschiedliche Fluide erreicht, können sehr unterschiedlich sein. In den Abbildungen 2.10 und 2.11 sind zwei verschiedene Ergebnisse aufgezeigt. Wie in den bereits vorhergehenden Graphiken stellt der farbige Hintergrund die Druckdaten dar und geben die weißen bzw. schwarzen Linien den Strömungsverlauf an.

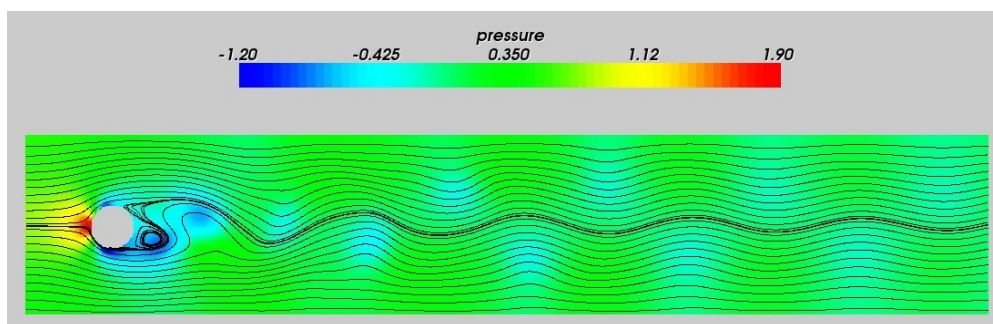
Bis zur Reynolds-Zahl 48 handelt es sich bei dem Simulationsergebnis um eine stationäre Strömung. Dies besagt, dass das Fluid in einen stationären Zustand gelangt. So einen Fall kann man in Abbildung 2.10 betrachten, denn $Re = 20$. In der Nachlaufzone des Zylinders entsteht ein Rücklauf der Strömung. Es pendelt sich jedoch schnell wieder so ein, dass der Fluss hinter dem Zylinder einer stationären Kanalströmung gleicht.

Zwischen der Reynolds-Zahl 49 und der Reynolds-Zahl 140 bis 190 sollte man eine laminare Wirbelablösung erkennen. Dieses Strömungsverhalten ist in Abbildung 2.11 zu sehen und wird auch als Kármánsche Wirbelstraße bezeichnet. Die gegengleichen Wirbel, die hinter dem Zylinder entstehen, schwingen mit einer bestimmten Frequenz und lösen sich abwechselnd vom Zylinder ab. Durch diese Wirbel erhält man einen instationären Strömungszustand. Dies bedeutet, dass der Zustand der Strömung in Abhängigkeit von der Zeit keinen konstanten Wert annimmt.



Quelle: [Neckel 08]

Abbildung 2.10: Modell eines Kanals mit Zylinder für ein Fluid mit $Re = 20$.



Quelle: [Neckel 08]

Abbildung 2.11: Modell eines Kanals mit Zylinder für ein Fluid mit $Re = 100$.

Kapitel 3

Physikalische Erhaltungssätze

Bei inkompressiblen Fluiden sollen die Masse und der Impuls erhalten bleiben. Für eine gute Simulierung ist es wünschenswert, diese Erhaltungssätze auch in der numerischen Annäherung zu erfüllen. Des Weiteren wollen wir auch die Energieerhaltung einbeziehen. Dies soll nicht in Form einer Nebenbedingung zu den Differentialgleichungen behandelt werden, sondern bereits in der Diskretisierungsmethode der Differentialgleichungen. Deshalb werden hier zur Vorbereitung alle drei Erhaltungssätze angegeben. Für einzelne physikalische Details, wie z.B. die verschiedenen Energien, wird verwiesen auf [Meschede 2006]. Geht es um mathematische Fragen zu den Erhaltungssätzen, findet man in [Gresho 98, Reddy 00] Nachweise.

3.1 Massenerhaltung

Im Folgenden ist $\rho(\mathbf{x}, t)$ die Dichte eines Fluids. Zur einfacheren Schreibweise verwenden wir hier ρ . Wenn ρ konstant ist, wird dies explizit erwähnt.

Massenerhaltung bedeutet nichts anderes, als dass die Massenänderung im Gebiet Ω gleich dem Massenfluss durch die Oberfläche von Ω ist. Die Komponente der Stromdichte $\rho \mathbf{u}$ in Richtung des Normalenvektors ergibt den Fluss durch den Rand. Die Massenerhaltung stellt sich als folgende Gleichung dar:

$$-\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho dV = \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (3.1)$$

Durch den Satz von Gauß verändert sich die Formel zu

$$-\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho dV = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) dV. \quad (3.2)$$

Die Zeitableitung wird noch in das Integral gezogen und beide Terme werden auf eine Seite der Gleichung gebracht:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) dV = 0. \quad (3.3)$$

Letztere Gleichung 3.3 muss aus physikalischen Gründen auch für beliebige Gebiete Ω gelten. Daraus ergibt sich bei hinreichender Glattheit, dass die Integranden schon punktweise Null ergeben müssen:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (3.4)$$

Man nennt diese Gleichung *Kontinuitätsgleichung*. In unserem Fall besitzen wir, wie bereits erwähnt, ein inkompressibles Fluid mit einer konstanten Dichte. Somit kann in dieser Arbeit mit einer einfacheren Form der Gleichung 3.4 gearbeitet werden:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (3.5)$$

Man beachte, dass die Gleichung 3.5 keinen Materialparameter enthält.

3.2 Impulserhaltung

Nach dem zweiten Newtonschen Gesetz gilt, dass die Änderung des Gesamtimpulses gleich der Summe der angreifenden Kräfte sein muss. Zu den angreifenden Kräften zählen wir die Volumenkräfte \mathbf{g} , zu denen zum Beispiel die Schwerkraft gehört, und die Oberflächenkräfte. Im Allgemeinen spricht man zwar von der Kraft, allerdings entsprechen die Werte, mit denen gerechnet wird, Kraftdichten. Die mathematische Darstellung für die Impulserhaltung lautet:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} dV = \sum_i F_i - \int_{\partial \Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (3.6)$$

Der letzte Term ist der Impulsstrom durch den Rand. $\sum_i F_i$ wird dargestellt als

$$\begin{aligned} \sum_i F_i &= \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} dV + \int_{\partial \Omega} \sigma \mathbf{n} dS \\ &= \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} dV + \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma dV. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Bei der Gleichung 3.7 wurden die Oberflächenkräfte durch den Spannungstensor zweiter Stufe σ modelliert. Der Spannungstensor hat in der Fluidodynamik eine andere Ursache als bei Festkörpern. In einem Fluid treten keine elastischen Spannungen auf, sondern ein molekularer Impulsaustausch zwischen Schichten, die sich gegeneinander verschieben.

Ab jetzt betrachten wir nur noch inkompressible Fluide. Wenn man nun 3.7 in die Gleichung 3.6 einsetzt, die Zeitableitung in das Integral zieht, das letzte Integral nach Gauß umformt und auf die linke Seite bringt, entsteht folgende Gleichung:

$$\int_{\Omega} \left(\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) dV = \int_{\Omega} (\rho \mathbf{g} + \operatorname{div} \sigma) dV. \quad (3.8)$$

Die Gleichung 3.8 soll wieder, wie schon bei der Kontinuitätsgleichung, für beliebige Gebietsgrößen erfüllt sein, wodurch wir bei hinreichender Glattheit

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \rho \mathbf{g} + \operatorname{div} \sigma \quad (3.9)$$

erhalten.

Nachdem in dieser Arbeit ausschließlich inkompressible Newtonsche Fluide vorausgesetzt werden, müssen die Spannungskräfte in alle Ortsrichtungen gleich wirken. Der Spannungstensor σ soll proportional vom symmetrisierten Gradienten der Geschwindigkeit abhängen. Durch diese Spezialisierungen gliedert sich unser Spannungstensor in einen nichtviskosen Druckanteil $-\mathbf{p}\mathbf{I}$ und einen dissipativen Anteil $\mu (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$:

$$\sigma = -\mathbf{p}\mathbf{I} + \mu (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T). \quad (3.10)$$

\mathbf{I} ist hier der Einheitstensor zweiter Stufe, \mathbf{p} ist der Druck des Fluids und μ dessen dynamische Viskosität.

Setzt man nun 3.10 in Gleichung 3.9 ein ergibt sich

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \rho \mathbf{g} - \nabla \mathbf{p} + \mu \Delta \mathbf{u}. \quad (3.11)$$

Da in dieser Arbeit die Volumenkräfte \mathbf{g} unbeachtet bleiben sollen werden diese gleich Null gesetzt. Man erhält des Weiteren durch Umstellen und Teilen durch ρ folgende Form der *Impulsgleichung*¹:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla \mathbf{p} - \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u} = 0. \quad (3.12)$$

3.3 Energieerhaltung

Wie bereits am Anfang des Kapitels erwähnt, ist die Energieerhaltung ein wichtiger Bestandteil der Aufgabenstellung. Die Aufgabe ist es, die entwickelte Diskretisierungsmethode der verwendeten Differentialgleichungen, welche die Energieerhaltung mit einbezieht, auf die Erfüllung letzteren Erhaltungssatzes zu überprüfen.

Die Energie E eines Fluids besteht aus kinetischer und innerer Energie. Da die innere Energie in unseren Differentialgleichungen nicht berücksichtigt wird, beschränken wir uns bei der Energieerhaltung auf die kinetische Energie. Die Zeitableitung der Energie wird mathematisch wie folgt definiert:

$$\frac{d}{dt} E = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dV. \quad (3.13)$$

Wird nun, wie auch schon bei den beiden anderen Erhaltungssätzen, die Zeitableitung in das Integral gezogen, sieht die Gleichung wie folgt aus:

$$\frac{d}{dt} E = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) dV = \int_{\Omega} \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{u} dV. \quad (3.14)$$

Von jetzt an ist unser Fluid wieder ein inkompressibles und Newtonsches Fluid. Lösen wir Gleichung 3.12 nach $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}$ auf und setzen dies in 3.14 ein, so ergibt sich:

$$\frac{d}{dt} E = \rho \int_{\Omega} \left(-(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{p} + \frac{\mu}{\rho} (\Delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{u} dV. \quad (3.15)$$

Die ersten zwei Integrandenterme aus 3.15 kürzen sich durch partielle Integration weg, bis auf übrig bleibende Randintegrale. Der letzte Integrand kann durch

¹Hingewiesen wird darauf, dass in der später dargestellten dimensionslosen Form dieser Gleichung der Viskositätsterm $\frac{\mu}{\rho}$ durch $\frac{1}{Re}$ ersetzt werden wird.

die Greensche Formel umgewandelt werden. Somit bleibt unter Vernachlässigung der Randbedingungen folgende Gleichung:

$$\frac{d}{dt}E = -\mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} dV. \quad (3.16)$$

Der Integrand ist von positivem Wert. Betrachtet man die Energieerhaltung von Anfang an ohne dem konstanten Term $\frac{\rho}{2}$ erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dV = -\frac{\mu}{\rho} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} dV \leq 0 \quad (3.17)$$

als Ergebnis.

Der übrigbleibende Integrand $\left(\frac{\mu}{\rho}(\Delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}\right) \cdot \mathbf{u}$ aus Gleichung 3.15 enthält den sogenannten Diffusionsterm $\frac{\mu}{\rho}(\Delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}$. Der Verlust an kinetischer Energie wird durch diesen Term, der Bewegungsenergie in innere Energie umsetzt, beschrieben. Erst die Berücksichtigung der inneren Energie hätte die gesamte Energieerhaltung zur Folge. Dies wird im stationären Fall ausgeglichen, indem mehr kinetische Energie durch den Rand einströmt als durch ihn wegfließt. Die Gleichung 3.17 zeigt somit, dass die Energie im Laufe der Zeit nicht grösser werden kann.

Wären die durch partielle Integration bei Gleichung 3.15 entstehenden Randintegrale gleich dem Energiefluss durch den Rand, würde das Ergebnis der Energieerhaltung entsprechen: $-\frac{\mu}{\rho} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} dV = 0$.

Kapitel 4

Navier-Stokes Gleichungen

Die Navier-Stokes Gleichungen sind Differentialgleichungen zur mathematischen Beschreibung von Fluidströmungen. Diese Differentialgleichungen sind die einzigen, die in dieser Arbeit angewendet werden.

In diesem Kapitel wird zunächst das für uns relevante Gleichungssystem gezeigt, welches für inkompressible Strömungen ausgelegt ist. Nach deren Erläuterung werden die Differentialgleichungen auf eine dimensionslose Form gebracht, welche es ermöglicht, Szenarien wesentlich kleiner zu simulieren, als sie in Wirklichkeit sind. Als letztes werden die Navier-Stokes Gleichungen noch in einer diskreten Form dargestellt, die für die numerische Simulation unverzichtbar ist.

4.1 Allgemeines zu den Navier-Stokes Gleichungen

Im Allgemeinen wird die Strömung eines Fluids innerhalb eines bestimmten Zeitintervalls $[t_0; t_{end}] \subset \mathbb{R}$ auf einem endlichen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ betrachtet, wobei $d \in \{2, 3\}$ der Dimension des Gebietes entspricht.¹

Die Navier-Stokes Gleichungen setzen sich aus der im vorherigen Kapitel hergeleiteten Impulsgleichung 3.12 und der Kontinuitätsgleichung 3.5 zusammen.

¹Wir betrachten ausschließlich den Fall $d = 2$.

Hier noch einmal zur Erinnerung beide Gleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla \mathbf{p} - \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u} &= 0, \quad \text{und} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0.\end{aligned}$$

Wie im vorhergehenden Kapitel bereits erwähnt, entspricht die Kontinuitätsgleichung der lokalen Massenerhaltung bzw. der Inkompressibilität. Die globale Massenerhaltung erreicht man, indem die Gleichung 3.5 über das Gebiet Ω integriert wird.

Im Folgenden wollen wir näher auf die einzelnen Terme der Impulsgleichung 3.12 eingehen.

Der nichtlineare Term $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ wird als *Konvektionsterm* bezeichnet und kann physikalisch wie folgt interpretiert werden: Wenn das Fluid senkrecht auf eine Beschleunigungsfront strömt, wird diese nicht verschoben. Allerdings wird die Flussgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Flussrichtung verstärkt oder gebremst.

Der *Diffusionsterm* $\frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u}$ modelliert die Reibungskräfte. Hierbei ist der Laplace-Operator $\Delta \mathbf{u}$ physikalisch zu erläutern. Ist $\Delta \mathbf{u} < 0$, wird in der Umgebung eines Partikels langsamer geströmt und das Partikel somit gebremst. Haben wir die umgekehrte Ungleichung $\Delta \mathbf{u} > 0$, so wird der Punkt durch die schnellere Umströmung beschleunigt.

Diese beiden Terme der Impulsgleichung beachten nicht die Inkompressibilität. Damit gelangen wir zum Druckgradienten $\nabla \mathbf{p}$. Physikalisch kann man sich diesen wie folgt vorstellen: Erhöht man den Druck an einem Punkt, so wird die Geschwindigkeit von diesem Punkt weggedrängt. Um die Inkompressibilität nicht außer Acht zu lassen, wirkt der Druckgradient als *Lagrange-Parameter*. Dies bedeutet, dass der Druck sich in jedem Zeitschritt so einstellt, dass die Inkompressibilität erhalten bleibt.

4.2 Dimensionslose Form der Navier-Stokes Gleichungen

Nachdem es teuer und kostspielig und noch dazu nicht immer möglich ist, einen wahren Fall in Originalgröße zu simulieren (z.B ein Flugzeug in einem Windkanal), wird von den Navier-Stokes Gleichungen eine dimensionslose Variante aufgestellt, mit der man physikalisch ähnliche Szenarien schaffen kann. Ein weiterer Vorteil ist es, dass nur noch ein Parameter neben der Geschwindigkeit und dem Druck vorhanden ist.

Bei der von uns gewählten Impulsgleichung 3.12 rechnen wir mit der kinematischen Viskosität ν und dem kinematischen Druck $\bar{\mathbf{p}}$, die wie folgt definiert sind:

$$\nu := \frac{\mu}{\rho}, \quad \bar{\mathbf{p}} := \frac{\mathbf{p}}{\rho}.$$

Es ergibt sich folgende Darstellung der Impulsgleichung:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + \nabla \bar{\mathbf{p}} - \nu \Delta \mathbf{u} = 0. \quad (4.1)$$

Die Größen, die für das Aufstellen der dimensionslosen Navier-Stokes Gleichungen nötig sind, werden durch $(\cdot)^*$ ausgezeichnet.

$$x^* := \frac{x}{L_0} \quad \text{dimensionsloser Ort,} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{u}^* := \frac{\mathbf{u}}{u_0} \quad \text{dimensionslose Geschwindigkeit,} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{p}^* := (\mathbf{p} - p_0) \frac{1}{\rho u_0^2} \quad \text{dimensionsloser Druck,} \quad (4.4)$$

$$t^* := \frac{t}{T_0} = t \frac{u_0}{L_0} \quad \text{dimensionslose Zeit.} \quad (4.5)$$

Für die Gleichungen 4.2 - 4.5 müssen noch die Referenzelemente L_0 , u_0 und T_0 gewählt werden. Durch den physikalischen Zusammenhang der Geschwindigkeit, Ort und Zeit $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}}{t}$, ist es ausreichend, zwei Referenzelemente zu bestimmen. Dazu kann man zum Beispiel für u_0 die mittlere Anströmgeschwindigkeit und für L_0 die Breite des Kanals wählen².

² L_0 ist abhängig von der Wahl des Szenarios

Die dimensionslose Form der Navier-Stokes Gleichungen (z.B. in [Neckel 05]) lautet:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \mathbf{u}^* + \nabla \mathbf{p}^* - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}^* = 0, \quad \text{und} \quad (4.6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^* = 0. \quad (4.7)$$

Hierbei setzt sich Re , die dimensionslose Reynoldszahl, zusammen aus

$$Re := \frac{\rho u_0 L_0}{\mu} = \frac{L_0 u_0}{\nu}. \quad (4.8)$$

Nachdem wir im Folgendem ausschließlich mit der dimensionslosen Form der Gleichungen 4.6 und 4.7 arbeiten, vereinfachen wir die Schreibweise, indem die Form $(\cdot)^*$ weggelassen wird.

4.3 Diskrete Form der Navier-Stokes Gleichungen

Zum numerischen Lösen der Navier-Stokes Gleichungen müssen wir eine diskretisierte Form dieser Differentialgleichungen bilden. Dies kann mit verschiedenen Methoden geschehen. Eine davon wird im anschließenden Kapitel erklärt. Hier soll zunächst die Darstellungsweise der diskreten Navier-Stokes Gleichungen gezeigt werden. Um eine Diskretisierung zu erreichen, wird vorliegend das Gebiet in ein regelmäßiges quadratisches Gitter eingeteilt. Die Dimension der endlichen Mengen \mathbf{u}_h und \mathbf{p}_h , welche die diskreten Variablen für die Geschwindigkeit und den Druck sind, hängt davon ab, wo (und somit an wievielen Orten) diese Vektoren berechnet werden.

Die folgende Version der Navier-Stokes Gleichungen wird eigentlich nur als semi-diskret bezeichnet, da die Zeitableitung von \mathbf{u}_h noch vorhanden ist, wobei wir diese durch $\mathbf{u}_{h,t}$ darstellen:

$$\mathbf{A} \mathbf{u}_{h,t} + \mathbf{C}(\mathbf{u}_h) \mathbf{u}_h + \mathbf{D} \mathbf{u}_h - \mathbf{M}^T \mathbf{p}_h = \mathbf{0} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{M} \mathbf{u}_h = \mathbf{0} \quad (4.10)$$

\mathbf{A} wird als sogenannte *Massenmatrix*³ bezeichnet. Der Term $\mathbf{C}(\mathbf{u}_h)$ stellt die Diskretisierung des Konvektionsoperators $\mathbf{u}_h \cdot \nabla$ dar. Weiterhin sei \mathbf{D} die Dis-

³In der Literatur wird die Massenmatrix meist als Ω bezeichnet. Da wir aber bereits das Gebiet damit notiert haben und in unserem Programm stattdessen mit der Bezeichnung \mathbf{A} gearbeitet wird, soll dies auch hier verwendet werden.

diskretisierung des Laplace-Operators $-\frac{1}{Re}\Delta$ im Diffusionsterm. \mathbf{M} steht für die Divergenz. Durch die von uns verwendete Methode zur Diskretisierung gilt $\text{div} = -\text{div}^T = -\nabla$ [Weinzierl 05, Strang 86] und führt somit beim Druckgradienten zu der diskreten Darstellung $-\mathbf{M}^T \mathbf{p}_h$.

Kapitel 5

Lösungsverfahren für die Navier-Stokes Gleichungen

In diesem Kapitel werden die Vorbereitungen erläutert, um die Navier-Stokes Gleichungen zu lösen. Zunächst wollen wir uns mit dem Zeitableitungsterm der Differentialgleichungen beschäftigen. Des Weiteren wird die Finite-Element-Methode erklärt. Mit dieser werden die einzelnen Terme der Navier-Stokes Gleichungen diskretisiert. Wir betrachten zwei verschiedene Ansatzfunktionen unter Anwendung der Finite-Element-Methode.

5.1 Druck-Poissongleichung

Die bislang angegebenen Navier-Stokes Gleichungen 4.6, 4.7 entsprechen der kontinuierlichen Darstellung unter Abhängigkeit der Zeit. In diesem Abschnitt wird auf die Behandlung der Zeitableitung, sowohl im kontinuierlichen als auch im diskreten Fall, eingegangen.

5.1.1 Kontinuierliche Druck-Poissongleichung

Die Zeitdiskretisierung folgt über den Ansatz des Differenzenquotienten. Dabei wird in Anlehnung an [Griebel 95] das explizite Eulerverfahren ([Larsson 03]) eingesetzt. Dieses sieht, auf unsere Zeitableitung der Geschwindigkeit ange-

wandt, wie folgt aus:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \approx \frac{\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(n)}}{\Delta t}. \quad (5.1)$$

Dabei entspricht Δt einem Zeitschritt. Auf Details zu dessen Berechnung kommen wir später in diesem Kapitel zurück. Das n bezieht sich in der Gleichung 5.5 auf den n -ten Zeitschritt. Setzt man dies nun in die Impulsgleichung 4.6 ein, erhält man

$$\frac{\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(n)}}{\Delta t} + (\mathbf{u}^{(n)} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{(n)} + \nabla \mathbf{p}^{(n)} - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}^{(n)} = 0 \quad (5.2)$$

als zeitdiskretisierte Gleichung.

In jedem Zeitschritt muss die Kontinuitätsgleichung 4.7 erfüllt sein. Die Gleichung dazu sieht dann folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{div} \mathbf{u}^{(n+1)} \\ &= \operatorname{div} \left[\mathbf{u}^{(n)} + \Delta t \left(-(\mathbf{u}^{(n)} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{(n)} - \nabla \mathbf{p}^{(n)} + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}^{(n)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Hierbei wurde 5.2 nach $\mathbf{u}^{(n+1)}$ aufgelöst und eingesetzt.

Angenommen man kennt bereits alle Geschwindigkeitswerte des n -ten Zeitschritts, muss der Druck so gewählt werden, dass $\operatorname{div} \mathbf{u}^{(n+1)} = 0$ ist. Dies wird erreicht, indem man letztere Gleichung nach dem Druckterm auflöst. Es entsteht die kontinuierliche Druck-Poissongleichung zur Bestimmung des Drucks zum Zeitpunkt n :

$$\Delta \mathbf{p}^{(n)} = \operatorname{div} \left(\frac{1}{\Delta t} \mathbf{u}^{(n)} - (\mathbf{u}^{(n)} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{(n)} + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}^{(n)} \right). \quad (5.4)$$

5.1.2 Diskrete Druck-Poissongleichung

Da für die Implementierung der diskrete Fall benötigt wird, wollen wir die Druck-Poissongleichung auch diskretisieren. Dies geschieht wie im soeben gezeigten kontinuierlichen Fall.

Die Gleichung 5.5 ist auch für den diskreten Fall anwendbar. Es müssen lediglich die kontinuierlichen Geschwindigkeits- und Druckwerte durch deren diskrete Varianten ersetzt werden:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} \approx \frac{\mathbf{u}_h^{(n+1)} - \mathbf{u}_h^{(n)}}{\Delta t}. \quad (5.5)$$

Setzt man dies in die diskrete Gleichung 4.9 ein, erhält man folgendes:

$$\mathbf{A} \frac{\mathbf{u}_h^{(n+1)} - \mathbf{u}_h^{(n)}}{\Delta t} + \mathbf{C}(\mathbf{u}_h) \mathbf{u}_h + \mathbf{D} \mathbf{u}_h - \mathbf{M}^T \mathbf{p}_h = \mathbf{0}. \quad (5.6)$$

Die Aufstellung der diskreten Terme dieser Gleichung wird später in diesem Kapitel näher erläutert. Löst man anschließend Gleichung 5.6 nach $\mathbf{u}_h^{(n+1)}$ auf, ergibt sich:

$$\mathbf{u}_h^{(n+1)} = \mathbf{u}_h^{(n)} + \Delta t \mathbf{A}^{-1} \left(-\mathbf{C}(\mathbf{u}_h^{(n)}) \mathbf{u}_h^{(n)} - \mathbf{D} \mathbf{u}_h^{(n)} + \mathbf{M}^T \mathbf{p}_h^{(n)} \right). \quad (5.7)$$

Gleichung 5.7 eingesetzt in die Kontinuitätsgleichung 4.10 liefert folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{M} \mathbf{u}_h^{(n+1)} \\ &= \mathbf{M} \mathbf{u}_h^{(n)} + \Delta t \mathbf{M} \mathbf{A}^{-1} \left(-\mathbf{C}(\mathbf{u}_h^{(n)}) \mathbf{u}_h^{(n)} - \mathbf{D} \mathbf{u}_h^{(n)} + \mathbf{M}^T \mathbf{p}_h^{(n)} \right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Diese, aufgelöst nach dem Druckterm, ergibt die in unserem Fall verwendete diskrete Druck-Poissongleichung:

$$\mathbf{M} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{p}_h^{(n)} = \mathbf{M} \mathbf{A}^{-1} \left(\mathbf{C}(\mathbf{u}_h^{(n)}) \mathbf{u}_h^{(n)} + \mathbf{D} \mathbf{u}_h^{(n)} \right) - \gamma \mathbf{M} \frac{\mathbf{u}_h^{(n)}}{\Delta t}. \quad (5.9)$$

Der letzte Term in Gleichung 5.9 ist ein Zusatz, der für unsere Implementierung notwendig ist. An sich sollte dieser Term, gleichgültig wie γ gewählt wurde, auf Grund der Massenerhaltung Null sein. Es kann aber manchmal vorkommen, dass dieser Erhaltungssatz nicht erfüllt ist. Es ist dann für das Programm sinnvoll, $\gamma = 1$ zu setzen, damit eine eventuelle Verletzung der Massenerhaltung erkannt werden kann und diese durch den Term $-\gamma \mathbf{M} \frac{\mathbf{u}_h^{(n)}}{\Delta t}$ eliminiert wird. In unserem Programm wird diese Fehler-Korrektur-Methode angewandt, also ist $\gamma = 1$.

5.2 Anwendung Finite-Element-Methode auf Navier-Stokes Gleichungen

Die Finite-Element-Methode ist ausführlich in [Braess 97] beschrieben. Wir betrachten allein den Spezialfall der Navier-Stokes Gleichungen.

5.2.1 Gitterwahl

Die Finite-Element-Methode hat zur Folge, dass das zu betrachtende Gebiet diskretisiert wird. Dazu wird das Gebiet in Polygone zerlegt. In unserem Fall wird das mit Quadraten der Kantenlänge h erreicht. An bestimmten Stellen der einzelnen Zellen sollen die diskreten Werte von \mathbf{u}_h und \mathbf{p}_h gespeichert werden. Die Geschwindigkeitswerte werden dabei in die zwei verschiedenen Richtungen der Koordinatenachsen unterteilt. $u_{h,1}$ ist die Geschwindigkeit in Koordinatenrichtung x_1 und $u_{h,2}$ die Geschwindigkeit für Koordinatenrichtung x_2 . Für die Speicherung dieser Werte gibt es verschiedene Möglichkeiten [Ferziger 02].

In dieser Arbeit wird das *teilweise versetzte Gitter* verwendet, wie in Abbildung 5.1 dargestellt. In den Ecken hat man die Geschwindigkeitsfreiheitsgrade der einzelnen Gitterelemente, während sich der Druck in jeder Zelle im Mittelpunkt befindet.

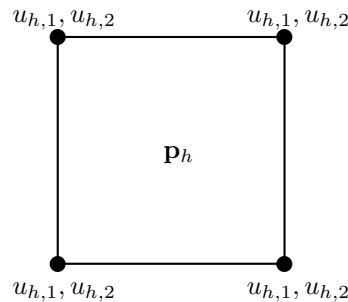


Abbildung 5.1: Teilweise versetztes Gitter auf einer Zelle; hierbei werden die Geschwindigkeiten in beide Dimensionsrichtungen $u_{h,1}$ und $u_{h,2}$ an den Ecken gespeichert und der Druck p_h in der Mitte der Zelle.

5.2.2 Allgemeine Diskretisierung

Für die Verwendung der Finite-Element-Methode benötigt man die schwache Formulierung der zu lösenden, kontinuierlichen partiellen Differentialgleichung. Dabei wird von einer punktwisen Gültigkeit auf eine Integral-gemittelte Gültigkeit der Gleichungen übergegangen. Dadurch verringern sich die Glattheitsvoraussetzungen, die man für die Problemstellung und ihre Lösungen braucht. Eine schwache Form von Differentialgleichungen erreicht man durch Multiplikation der Gleichungen mit einer geeigneten Ansatzfunktion $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ aus dem endlich dimensionalen Ansatzraum¹ und einer anschließenden Integration dieses Terms über das gesamte Gebiet ([Foias 01, Braess 97]). Die Randbedingungen müssen dabei mit eingebracht werden:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}}{\partial t} + \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \nabla \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \nabla \mathbf{p} - \frac{1}{Re} \Delta \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} dV = 0.$$

Nachdem man diese Form der partiellen Differentialgleichungen hat, geht man unter Verwendung der Galerkin-Projektion in einen endlich dimensionalen Funktionenraum über. Das wird erreicht, indem man die kontinuierliche Geschwindigkeit \mathbf{u} durch Ansatzfunktionen approximiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\approx \mathbf{u}_h \\ &= \sum_i \begin{pmatrix} u_{1,h}(i) \phi_1(i) \\ u_{2,h}(i) \phi_2(i) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Die folgenden drei Matrizen werden alle auf diese Art berechnet. Dabei ist hinzuzufügen, dass die Randintegrale, die bei den folgenden Berechnungen durch Anwendung der Greenschen Formel auftreten sollten, zu Null gesetzt werden. Die Integrale auf dem Dirichletrand sind auf Grund der Wahl der Ansatzfunktionen Null. Die Integrale auf dem Neumannrand werden eliminiert, indem wir die Gleichung 2.4 durch ρ teilen und die rechte Seite Null setzen:

$$\frac{\mu}{\rho} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \frac{\mathbf{p}}{\rho} \mathbf{n} = 0. \quad (5.11)$$

Da die Massenmatrix relativ unkompliziert zu berechnen ist, soll diese unser erster zu betrachtender Term sein.

¹Details zur schwachen Formulierung und zu Funktionenräumen finden sich in [Braess 97].

Massenmatrix \mathbf{A}

Im Allgemeinen soll der kontinuierliche Term $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} := \mathbf{u}_t$ umgewandelt werden in den diskretisierten Term $\mathbf{A}\mathbf{u}_{h,t}$. Um uns das Schreiben für die Berechnung zu erleichtern, rechnen wir mit \mathbf{u} , anstatt mit der dazugehörigen Zeitableitung. Nachdem dies für jede Wahl von Ansatzfunktionen so gerechnet wird, nehmen wir die bereits im vorhergehenden Abschnitt eingeführten neutralen Basisfunktionen ϕ_1 für den u_1 -Teil und ϕ_2 für den u_2 -Teil der Geschwindigkeit und $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$. Mit der Finite-Element-Methode erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{u} \phi(j) dV &\stackrel{5.10}{=} \sum_i \mathbf{u}_h(i) \int_{\Omega} \phi(i) \cdot \phi(j) dV \\ &= \sum_i \mathbf{u}_h(i) \int_{\Omega} \left(\phi_1(i) \phi_1(j) + \phi_2(i) \phi_2(j) \right) dV \\ &=: \mathbf{A} \mathbf{u}_h \end{aligned}$$

als Ergebnis. Für den nach der Zeit abgeleiteten Term der Impulsgleichung muss man noch \mathbf{u} durch \mathbf{u}_t ersetzen.

Da das Integral bei uns über ein zweidimensionales Gebiet reicht, welches in ein reguläres Gitter unterteilt wurde, muss bei dieser Matrix noch eine Skalierung von h^2 folgen.

Die hieraus resultierende lokale Matrix \mathbf{A} wird für die Implementierung und für folgende Tests diagonalisiert. Dies geschieht, indem man den jeweiligen Wert einer Zeilensumme in deren Diagonalelement schreibt und die restlichen Werte der Zeile löscht. In unserem Fall ist dieser Term in jeder Zeile gleich und kann somit als Konstante c vor die daraus resultierende Einheitsmatrix \mathbf{I} geschrieben werden. Zusätzlich wird noch der Skalierungsfaktor h^2 zu der sogenannten „gelumpten“ Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ hinzugefügt:

$$\mathbf{A} \mapsto \tilde{\mathbf{A}} = h^2 c \mathbf{I}.$$

Weitere Möglichkeiten, Matrizen dieser Art zu vereinfachen, finden sich im Anhang B. Der Grund für diese Vereinfachung ist der Druck-Poissongleichung zu entnehmen. In dieser muss nämlich die Massenmatrix \mathbf{A} invertiert werden, was bei Matrizen durchaus aufwändig sein kann. Die Invertierte einer Diago-

nalmatrix kann hingegen explizit aufgestellt werden, womit keine zusätzliche Rechenzeit und Speicherkapazität in Anspruch genommen wird.

Diffusionsmatrix \mathbf{D}

Hier verwenden wir erneut das Schema der Finite-Element-Methode, diesmal um den Term $-\frac{1}{\text{Re}}\Delta\mathbf{u}$ zu diskretisieren:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega} \Delta\mathbf{u}\phi(j)dV &= -\frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega} \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi_1(j) \\ \phi_2(j) \end{pmatrix} dV \quad \forall j \\
 &= \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega} \left(\nabla u_1 \nabla \phi_1(j) + \nabla u_2 \nabla \phi_2(j) \right) dV \\
 &= \frac{1}{\text{Re}} \sum_i \mathbf{u}_h(i) \int_{\Omega} \left(\nabla \phi_1(i) \nabla \phi_1(j) + \nabla \phi_2(i) \nabla \phi_2(j) \right) dV \\
 &= \frac{1}{\text{Re}} \sum_i \mathbf{u}_h(i) \int_{\Omega} \left(\partial_{x_1} \phi_1(i) \partial_{x_1} \phi_1(j) + \partial_{x_2} \phi_1(i) \partial_{x_2} \phi_1(j) \right. \\
 &\quad \left. + \partial_{x_1} \phi_2(i) \partial_{x_1} \phi_2(j) + \partial_{x_2} \phi_2(i) \partial_{x_2} \phi_2(j) \right) dV \\
 &=: \mathbf{D}\mathbf{u}_h.
 \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite der ersten Gleichung entspricht der Inhalt des Integrals einem vektoriellen Skalarprodukt. Die Umformung von der ersten in die zweite Zeile gelang durch Anwendung der partiellen Integration.

Jetzt fehlt noch die notwendige Skalierung. Das Integral liefert, wie schon bei der Massenmatrix \mathbf{A} den Faktor h^2 . Allerdings erhält man mit einem Gradienten den Faktor h^{-1} . Da dieser hier quadratisch erscheint, kürzen sich die einzelnen Skalierungsterme weg.

Konvektionsmatrix \mathbf{C}

Die Konvektionsmatrix berechnet man wie die beiden vorhergehenden Matrizen. Der einzige Unterschied besteht darin, dass \mathbf{C} selbst von \mathbf{u} abhängig ist, da dies der einzige nichtlineare Term der Impulsgleichung ist.

Folgende Berechnung leitet die Konvektionsmatrix \mathbf{C} her:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \phi(j) dV &= \int_{\Omega} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \nabla u_1 \\ \mathbf{u} \nabla u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi_1(j) \\ \phi_2(j) \end{pmatrix} dV \quad \forall j \\
 &= \int_{\Omega} \left((\mathbf{u} \cdot \nabla u_1) \phi_1(j) + (\mathbf{u} \cdot \nabla u_2) \phi_2(j) \right) dV \\
 &= \sum_{l,k} \mathbf{u}_h(l) \mathbf{u}_h(k) \int_{\Omega} \left((\phi(l) \cdot \nabla \phi_1(k)) \phi_1(j) \right. \\
 &\quad \left. + (\phi(l) \cdot \nabla \phi_2(k)) \phi_2(j) \right) dV \\
 &= \sum_{l,k} \mathbf{u}_h(l) \mathbf{u}_h(k) \int_{\Omega} \left(\phi_1(l) \partial_{x_1} \phi_1(k) \phi_1(j) \right. \\
 &\quad \left. + \phi_2(l) \partial_{x_2} \phi_1(k) \phi_1(j) + \phi_1(l) \partial_{x_1} \phi_2(k) \phi_2(j) \right. \\
 &\quad \left. + \phi_2(l) \partial_{x_2} \phi_2(k) \phi_2(j) \right) dV \\
 &=: \mathbf{C}(\mathbf{u}_h) \mathbf{u}_h.
 \end{aligned}$$

Da, wie schon in den vorhergehenden Abschnitten festgestellt, der Gradient den Faktor h^{-1} und das Integral h^2 liefert, erhält man für diese Matrix insgesamt den Skalierungsfaktor h .

Die Matrix \mathbf{M} wird in diesem Unterabschnitt nicht behandelt. Dies liegt daran, dass sie über Finite Volumen berechnet wird und nicht über die Finite-Element-Methode. Die Herleitung dafür wird später gegeben.

5.3 Ansatzfunktionen

Für die Lösung partieller Differentialgleichungen mit der Methode der Finiten Elemente bedarf es, wie aus dem vorherigen Kapitel ersichtlich, gewisser Ansatzfunktionen zur Approximation der kontinuierlichen Geschwindigkeit \mathbf{u} . Es gibt verschiedene Möglichkeiten, diese aufzustellen. In dieser Arbeit kommen zwei Ansätze als Lösungsmethoden vor. Beide beziehen sich auf das teilweise versetzte Gitter.

Zur Notation sei gesagt, dass wir von nun an das h bei den diskretisierten Variablen weglassen dafür aber bei einem Gitterpunkt gehörigen Parameter den Knoten als Index hinzufügen.

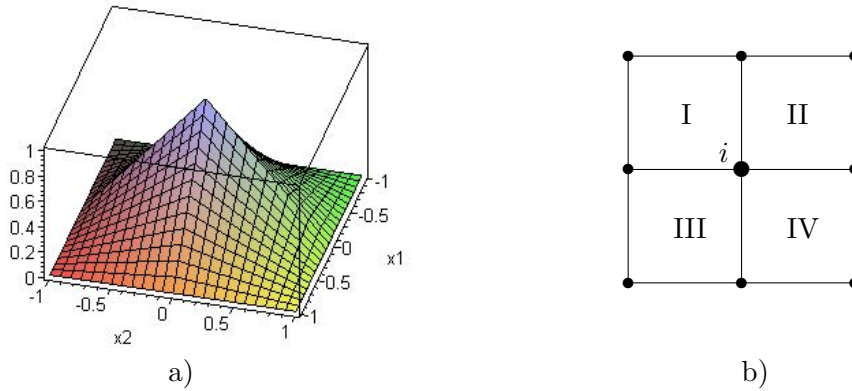


Abbildung 5.2: Bilineare Basisfunktion Ψ_i und ihr Träger

5.3.1 Bilineare Ansatzfunktionen

Die Ansatzfunktionen werden im Allgemeinen so gewählt, dass sie lediglich einen lokalen Träger zu Grunde liegen haben. Das bedeutet, dass eine Ansatzfunktion ϕ_i nur die an den Gitterpunkt i anschließenden Zellen berücksichtigt. Für die Basis ϕ hat dies eine dünnbesetzte Matrixstruktur zur Folge. In unseren speziellen Fällen bedeutet dies, dass die Basis ϕ so gewählt wird, dass folgendes für die Gitterpunkte gilt:

$$\phi_i(x_i) = 1, \quad \phi_j(x_i) = 0 \quad \forall j \neq i, \quad i, j = N.$$

Dies entspricht einer nodalen Basis eines gewissen Polynomgrades auf Elementknoten eines Gitters. N ist dabei die Anzahl der vorhandenen Knotenpunkte auf dem diskretisierten Gebiet. In Abbildung 5.2 wird nun die herkömmlichste Basis, die *bilineare Basis* mit ihrem Träger aus vier Zellen mit Kantenlänge h , gezeigt.

Mit diesen Ansatzfunktionen wird in dieser Diplomarbeit gearbeitet. Dabei ist zu erwähnen, dass in der Abbildung 5.2 a) die Höhe h auf Eins gesetzt wurde und i von $\Psi_i(x_1, x_2)$ dem Ursprung in diesem Koordinatensystem entspricht.

Die Definition zur bilinearen Basisfunktion, die wir als $\Psi_i(x_1, x_2)$ notieren, lautet:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_i(x_1, x_2)|_I &= \frac{1}{h^2} x_1 (h - x_2) \\ \Psi_i(x_1, x_2)|_{II} &= \frac{1}{h^2} (h - x_1)(h - x_2) \\ \Psi_i(x_1, x_2)|_{III} &= \frac{1}{h^2} x_1 x_2 \\ \Psi_i(x_1, x_2)|_{IV} &= \frac{1}{h^2} (h - x_1) x_2 \end{aligned} \right\} \text{ mit } x_1, x_2 \in [0, h].$$

Zum Abschluss wird noch die diskrete Geschwindigkeit mit diesen Ansatzfunktionen aufgestellt:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} u_{1,i} \Psi_i \\ u_{2,i} \Psi_i \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Die Ansatzfunktionen Ψ_i diskretisieren die Navier-Stokes Gleichungen, so dass die Massenerhaltung und Impulserhaltung dieser Differentialgleichungen auch im diskreten Fall erfüllt sind. Die Energieerhaltung wird hier unbeachtet gelassen.

5.3.2 Divergenzfreie Ansatzfunktionen

Als Alternative zu der bilinearen Basis wurden in [Blanke 04] neue, *divergenzfreie* Ansatzfunktionen entwickelt. Bei deren Aufstellung wurde die Energieerhaltung berücksichtigt². Für das bessere Verständnis wird dazu die Herleitung für die nötigen Eigenschaften der diskreten Matrizen erklärt. Im Anschluss können die divergenzfreien Ansatzfunktionen entwickelt werden.

Herleitung der Eigenschaften der diskreten Terme

Um die divergenzfreien Ansatzfunktionen aufstellen zu können, wird zuerst festgehalten, welche Eigenschaften die diskreten Terme der Navier-Stokes Gleichungen erfüllen müssen. Da wir bei diesen Ansatzfunktionen die Energieerhaltung berücksichtigen wollen, betrachten wir nochmals deren Formel 3.13:

$$\frac{d}{dt} E = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dV, \quad (5.13)$$

²Dabei wurde in der Arbeit von [Blanke 04] der Nachweis des praktischen Nutzens ausklammert; dieser Nachweis ist Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

und das Endergebnis 3.17 nach einigen Veränderungen:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dV = -\frac{\mu}{\rho} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} dV \leq 0. \quad (5.14)$$

Die diskrete Energieänderung nach der Zeit lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$\frac{d}{dt} E = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u}). \quad (5.15)$$

Berechnet man nun die diskrete Energieänderung unter Verwendung der Gleichung 4.9 und durch Kürzen des Terms $\frac{1}{2}$, erhalten wir folgendes Ergebnis:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u}) = -\mathbf{u}^T (\mathbf{C}(\mathbf{u}) + \mathbf{C}^T(\mathbf{u})) \mathbf{u} - \mathbf{u}^T (\mathbf{D} + \mathbf{D}^T) \mathbf{u} \quad (5.16)$$

$$+ \mathbf{u}^T (\mathbf{M}^T \mathbf{p}) + \mathbf{u}^T (\mathbf{M}^T \mathbf{p})^T. \quad (5.17)$$

Der Druckanteil

$$\mathbf{u}^T (\mathbf{M}^T \mathbf{p}) + \mathbf{u}^T (\mathbf{M}^T \mathbf{p})^T \quad (5.18)$$

fällt weg, denn der linke Term aus 5.18 enthält die transponierte Kontinuitätsgleichung $\mathbf{u}^T \mathbf{M}^T$ und muss daher Null sein. Der rechte Term aus 5.18 lässt sich wie folgt umformen:

$$\mathbf{u}^T (\mathbf{M}^T \mathbf{p})^T \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \mathbf{p}^T \mathbf{M}^{TT} \mathbf{u}. \quad (5.19)$$

Da $\mathbf{M}^{TT} = \mathbf{M}$ ist, enthält dieser Term die Kontinuitätsgleichung $\mathbf{M} \mathbf{u}$. Somit wird auch dieser Teil zu Null. Der gesamte Druckterm 5.18 spielt folglich bei der Energieänderung keine Rolle:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u}) = -\mathbf{u}^T (\mathbf{C}(\mathbf{u}) + \mathbf{C}^T(\mathbf{u})) \mathbf{u} - \mathbf{u}^T (\mathbf{D} + \mathbf{D}^T) \mathbf{u}. \quad (5.20)$$

Im Kontinuierlichen hängt die Energieänderung nach 3.17 nur vom Diffusionsterm ab, womit wir aus Gleichung 5.20 folgern können, dass

$$\mathbf{C}(\mathbf{u}) + \mathbf{C}^T(\mathbf{u}) = 0$$

gelten muss, was die Antisymmetrie³ von $\mathbf{C}(\mathbf{u})$ zur Folge hat. Damit die Energie, wie im physikalischen Sinne, zumindest fällt, muss \mathbf{D} positiv semidefinit

³Eine Matrix \mathbf{B} heißt anti- bzw. schiefsymmetrisch, wenn gilt $-\mathbf{B}^T = \mathbf{B}$.

sein. Durch die Wahl unserer Elemente ist die Diffusionsmatrix zusätzlich zu diesen Eigenschaften auch noch symmetrisch. Die gleichen Voraussetzungen liegen auch in [Verstappen 01] zu Grunde.

Die bilinearen Voraussetzungen achten nicht darauf, ob eine Energieerhaltung erreicht wird oder nicht. Ein weiterer Unterschied zwischen den beiden Ansatzfunktionen ist die punktweise Divergenzfreiheit, die die divergenzfreien Ansatzfunktionen im Vergleich zu den bilinearen erfüllen.

Nun zur Erläuterung der divergenzfreien Ansatzfunktionen. Deren Elementträger sind wie bei der bilinearen Basis quadratisch und lokal. Natürlich sollen die festgestellten Eigenschaften der Matrizen \mathbf{C} und \mathbf{D} von den Funktionen erreicht werden. Die letzte Forderung ist, wie bereits erwähnt, die punktweise Divergenzfreiheit. Elemente, die dieser Forderung genügen, nennen wir *kontinuitätserhaltende Finite Elemente*.

Aufstellen der divergenzfreien Ansatzfunktionen

Die hier zu entwickelnde Basis $\{\Phi_1 \dots \Phi_{2N}\}$ für den endlichdimensionalen Funktionenraum soll eine nodale Basis sein, wobei Φ_i bzw. Φ_{N+i} für $i = 1, \dots, N$ auf dem i -ten Gitterpunkt gleich $(1, 0)$ bzw. $(0, 1)$ sein soll und auf den anderen Gitterpunkten $(0, 0)$. Nun wird \mathbf{u} mit diesen Funktionen dargestellt:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} u_{1,i} \Phi_i \\ u_{2,i} \Phi_{N+i} \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

Bevor wir die Basisfunktionen konkret aufstellen, und zwar wie in [Blanke 04], müssen die einzelnen Zellen noch auf kontinuieritätserhaltende Weise interpoliert werden. Die Geschwindigkeiten an den Eckpunkten einer Zelle seien bekannt und erfüllen die diskrete Kontinuitätsgleichung, wobei diese an jedem Punkt der Zelle erfüllt sein soll. Dafür wird das Quadrat in vier gleichschenkelige Dreiecke unterteilt. Über diese wird interpoliert, der Mittelpunkt des Quadrates soll hierbei ein unbekannter Geschwindigkeitsterm (u_1, u_2) sein. In Abbildung 5.4 sind die Werte für die zu u_1 gehörenden Basisfunktionen angegeben. Man sieht, dass die Werte in den Zellmittelpunkten auch Geschwindigkeiten für u_2 besitzen. Diese erhalten die Kontinuität. Da diese Werte nun von den Basisfunktionen erfüllt werden müssen, ebenso wie das dazugehörige Gegenstück für u_2 , erhalten

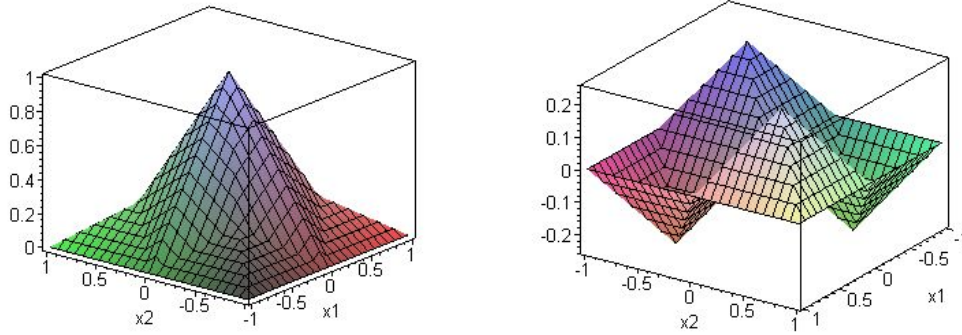


Abbildung 5.3: Darstellung der divergenzfreien Ansatzfunktionen auf einem lokalen Träger.

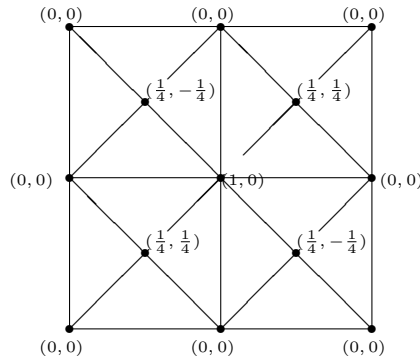


Abbildung 5.4: Lokaler Träger der divergenzfreien Ansatzfunktionen für die Geschwindigkeiten u_1 in x_1 -Richtung.

wir die Ansatzfunktionen, die in Abbildung 5.3 zu sehen sind. Allerdings ist anzumerken, dass wir in der Grafik die Höhe $h = 1$ gesetzt haben. Zudem sind bei dieser Abbildung diese Ansatzfunktionen die zum Ursprung zugehörigen Funktionen. Mathematisch setzen sich die Basisfunktionen wie folgt zusammen:

$$\Phi_i := \begin{pmatrix} \hat{\Phi}_i \\ \varphi_i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Phi_{N+i} := \begin{pmatrix} \varphi_i \\ \hat{\Phi}_i \end{pmatrix}.$$

Für das bessere Verständnis geben wir noch die Teilfunktionen $\hat{\Phi}_i$ und φ_i für die Zelle, die sich, vom Ursprung aus gesehen, in beiden Richtungen im Positiven befindet⁴. Alle weiteren Funktionen erhält man durch Symmetrie und

⁴In unserem Fall ist es das Element rechts oben in der Abbildung 5.4.

Vorzeichenwechsel. Hierbei ist noch zu erwähnen, dass $x_1, x_2 \in [0, h]$ zu Grunde liegt:

$$\hat{\Phi}_i(x_1, x_2) := \begin{cases} 1 - \frac{x_1}{h} - \frac{x_2}{2h} & \text{falls } x_1 \geq x_2 \wedge x_1 \leq h - x_2 \\ \frac{1}{2} - \frac{x_1}{2h} & \text{falls } x_1 \geq x_2 \wedge x_1 \geq h - x_2 \\ \frac{1}{2} - \frac{x_2}{2h} & \text{falls } x_1 \leq x_2 \wedge x_1 \geq h - x_2 \\ 1 - \frac{x_1}{2h} - \frac{x_2}{h} & \text{falls } x_1 \leq x_2 \wedge x_1 \leq h - x_2 \end{cases}, \quad \text{und}$$

$$\varphi_i(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{x_2}{2h} & \text{falls } x_1 \geq x_2 \wedge x_1 \leq h - x_2 \\ \frac{1}{2} - \frac{x_1}{2h} & \text{falls } x_1 \geq x_2 \wedge x_1 \geq h - x_2 \\ \frac{1}{2} - \frac{x_2}{2h} & \text{falls } x_1 \leq x_2 \wedge x_1 \geq h - x_2 \\ \frac{x_1}{2h} & \text{falls } x_1 \leq x_2 \wedge x_1 \leq h - x_2 \end{cases}.$$

Diese Ansatzfunktionen sollten anhand ihrer Herleitung energieerhaltend sein. Dies wird im Laufe dieser Diplomarbeit noch überprüft.

5.4 Lokale diskrete Terme

Die diskreten Terme der Navier-Stokes Gleichungen können in zwei verschiedenen Arten dargestellt werden: die lokale und die globale Variante. Bei ersterer werden die Matrizen für eine einzelne Zelle Ω^e des unterteilten Gebietes Ω aufgestellt. Bei unseren zwei verschiedenen Ansatzfunktionen sind die lokalen Matrizen für jede Zelle gleich. Bei der globalen Darstellung beziehen sich die Matrizen auf das gesamte Gebiet Ω .

In diesem Abschnitt werden der Vollständigkeit halber die lokalen Matrizen der zwei Basisfunktionen angegeben. Durch die lokale Darstellung können wir auch von vornherein ihre Dimension festlegen, während dies im globalen Fall von der Größe des Szenarios abhängt. Um für späteres Arbeiten die lokalen von den globalen Matrizen unterscheiden zu können, werden die lokalen Terme mit e im Exponenten versehen. In unserem Fall werden die Matrizen so aufgeteilt, dass zuerst Terme kommen, die zur Dimensionsrichtung x_1 und anschließend die Terme, die zu x_2 gehören. In jeder Zelle gibt es für jede Richtung vier Komponenten, also insgesamt acht. Die Matrizen \mathbf{A}^e und \mathbf{D}^e sind somit Elemente aus $\mathbb{R}^{8 \times 8}$. Bei \mathbf{C}^e ist das durch die Abhängigkeit von \mathbf{u} etwas anders. Dadurch, dass $\mathbf{C}^e(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^T \mathbf{C}^e$ ist, gilt hier $\mathbf{C}^e(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^{64 \times 8}$. Die Divergenzmatrix \mathbf{M}^e erhält

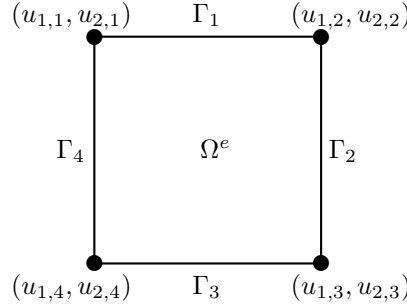


Abbildung 5.5: Zelle als ein Gebiet Ω^e betrachtet mit ihren speziellen Bezeichnungen zur Berechnung der lokalen Divergenzmatrix \mathbf{M}^e .

man auf anderem Wege. Da diese Matrix für beide entwickelten Ansatzfunktionen die selbe ist, wird sie in einem zusätzlichen Unterabschnitt behandelt und bei der Darstellung der anderen lokalen Matrizen nicht erneut aufgeführt.

5.4.1 Lokale Divergenzmatrix \mathbf{M}

Die Divergenzmatrix \mathbf{M}^e ist in $\mathbb{R}^{1 \times 8}$ enthalten. Sie wird über die Finiten Volumen diskretisiert. Dies geschieht, indem man das zu diskretisierende Gebiet in eine endliche Zahl von Volumen unterteilt. Anschließend werden die Integrale über den Rand des Gebietes geeignet approximiert.

In unserem Fall entspricht eine Zelle einem sogenannten Kontrollvolumen. Die Ränder einer solchen Zelle verlaufen parallel zu den Koordinatenachsen. In Abbildung 5.5 sind die speziellen Bezeichnungen einer einzelnen Zelle gezeigt. Die Randintegralgleichung erhält man nun wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \Omega^e : \quad 0 &= \nabla \mathbf{u} \Rightarrow \\
 0 &= \int_{\Omega^e} \nabla \mathbf{u} dV = \int_{\Gamma^e} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \\
 &= \int_{\Gamma_1} u_2 dS + \int_{\Gamma_2} u_1 dS - \int_{\Gamma_3} u_2 dS - \int_{\Gamma_4} u_1 dS. \quad (5.22)
 \end{aligned}$$

Verwendet man anschließend die Trapezregel auf das bereits diskretisierte \mathbf{u} , erhält man

$$\frac{u_{1,2} + u_{1,4}}{2} h - \frac{u_{1,1} + u_{1,3}}{2} h + \frac{u_{2,1} + u_{2,2}}{2} h - \frac{u_{2,3} + u_{2,4}}{2} h = 0 \quad (5.23)$$

als unsere spezielle diskrete Kontinuitätsgleichung. Dieser können wir nun das, für spätere Rechnungen nötige \mathbf{M}^e entnehmen:

$$\mathbf{M}^e = \frac{h}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

5.4.2 Matrizen der bilinearen Ansatzfunktionen

Da im Fall der bilinearen Basis die punktweise Divergenzfreiheit nicht erfüllt ist, und somit die Geschwindigkeitsterme u_1 und u_2 keinen Einfluss aufeinander haben, können die nötigen lokalen Assemblierungsmatrizen in Blockdarstellung aufgezeigt werden. Beispiele für globale Matrizen befinden sich im Anhang.

Lokale Massenmatrix \mathbf{A}^e

Wir wollen die Reihenfolge wie bei der Herleitung beibehalten und fangen somit mit der Massenmatrix \mathbf{A}^e an:

$$\mathbf{A}^e =: h^2 \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1^e \end{pmatrix}.$$

Die Teilmatrix \mathbf{A}_1^e sieht folgendermaßen aus:

$$\mathbf{A}_1^e = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{36} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

Will man die gelumppte lokale Matrix $\tilde{\mathbf{A}}^e$ aufstellen, muss man den Vorfaktor der resultierenden Einheitsmatrix berechnen. Diesen erhält man durch Summieren einer Zeile und dem Skalierungswert h^2 . Somit haben wir

$$\tilde{\mathbf{A}}^e = \frac{h^2}{4} \mathbf{I}.$$

als vereinfachte Massenmatrix.

Lokale Diffusionsmatrix \mathbf{D}^e

Analog zu Matrix \mathbf{A}^e erhält man mit der Finite-Element-Methode auch die lokale Diffusionsmatrix:

$$\mathbf{D}^e =: \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1^e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_1^e \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{D}_1^e = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Lokale Konvektionsmatrix $\mathbf{C}(\mathbf{u})$

Wie bereits erwähnt, ist die lokale Konvektionsmatrix \mathbf{C}^e durch seine Abhängigkeit von der Geschwindigkeit nicht gerade klein. Hier nun die konkreten Werte für den bilinearen Fall:

$$\mathbf{C}^e =: \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1^e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_1^e \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{C}_1^e = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{1,up}^e \\ \mathbf{C}_{1,down}^e \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{1,up}^e = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{36} & \frac{1}{36} \\ -\frac{1}{24} & \frac{1}{24} & -\frac{1}{72} & \frac{1}{72} \\ -\frac{1}{36} & \frac{1}{36} & -\frac{1}{36} & \frac{1}{36} \\ -\frac{1}{72} & \frac{1}{72} & -\frac{1}{72} & \frac{1}{72} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{36} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{36} \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & -\frac{1}{36} & -\frac{1}{36} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{72} & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{72} \\ \frac{1}{72} & \frac{1}{72} & -\frac{1}{72} & -\frac{1}{72} \\ -\frac{1}{24} & \frac{1}{24} & -\frac{1}{72} & \frac{1}{72} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{36} & \frac{1}{36} \\ -\frac{1}{72} & \frac{1}{72} & -\frac{1}{72} & \frac{1}{72} \\ -\frac{1}{36} & \frac{1}{36} & -\frac{1}{36} & \frac{1}{36} \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & -\frac{1}{36} & -\frac{1}{36} \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{36} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{72} & \frac{1}{72} & -\frac{1}{72} & -\frac{1}{72} \\ \frac{1}{72} & \frac{1}{24} & -\frac{1}{72} & -\frac{1}{24} \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \mathbf{C}_{1,down}^e = \begin{pmatrix} -\frac{1}{36} & \frac{1}{36} & -\frac{1}{36} & \frac{1}{36} \\ -\frac{1}{72} & \frac{1}{72} & -\frac{1}{72} & \frac{1}{72} \\ -\frac{1}{36} & \frac{1}{36} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{72} & \frac{1}{72} & -\frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{72} & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{72} \\ \frac{1}{72} & \frac{1}{72} & -\frac{1}{72} & -\frac{1}{72} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{36} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{36} \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & -\frac{1}{36} & -\frac{1}{36} \\ -\frac{1}{72} & \frac{1}{72} & -\frac{1}{72} & \frac{1}{72} \\ -\frac{1}{36} & \frac{1}{36} & -\frac{1}{36} & \frac{1}{36} \\ -\frac{1}{72} & \frac{1}{72} & -\frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ -\frac{1}{36} & \frac{1}{36} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{72} & \frac{1}{72} & -\frac{1}{72} & -\frac{1}{72} \\ \frac{1}{72} & \frac{1}{24} & -\frac{1}{72} & -\frac{1}{24} \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & -\frac{1}{36} & -\frac{1}{36} \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{36} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

5.4.3 Matrizen der divergenzfreien Ansatzfunktionen

Bei den durch die divergenzfreie Basis entstehenden Assemblierungsmatrizen handelt es sich, durch die dortige Abhängigkeit der horizontalen und vertikalen Richtungsterme der Geschwindigkeit, um voller besetzte Matrizen.

Lokale Massenmatrix \mathbf{A}^e

In diesem Abschnitt wird die lokale Massenmatrix \mathbf{A}^e der divergenzfreien Ansatzfunktionen und ihre gelumppte Version dargestellt.

$$\mathbf{A}^e = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & -\frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & 0 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} & 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & 0 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & -\frac{1}{24} \\ -\frac{1}{24} & 0 & 0 & -\frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} \\ -\frac{1}{24} & 0 & 0 & -\frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Hierbei wird die lokale gelumppte Version $\tilde{\mathbf{A}}^e$ der Massenmatrix \mathbf{A}^e wieder wie bei der bilinearen Basis festgelegt:

$$\tilde{\mathbf{A}}^e = \frac{h^2}{4} \mathbf{I}.$$

Lokale Diffusionsmatrix \mathbf{D}^e

Die hier dargestellte Diffusionsmatrix \mathbf{D}^e für die divergenzfreien Ansatzfunktionen erfüllt die gewünschte Eigenschaft der positiven Semidefinitheit und ist zudem symmetrisch:

$$\mathbf{D}^e = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1^e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_1^e \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{D}_1^e = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Lokale Konvektionsmatrix \mathbf{C}^e

Die Konvektionsmatrix für die divergenzfreien Ansatzfunktionen sieht wie folgt aus:

$$\mathbf{C}^e = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1^e & \mathbf{C}_2^e \\ \mathbf{C}_2^e & \mathbf{C}_1^e \end{pmatrix}, \quad \text{mit}$$

$$\mathbf{C}_1^e = \begin{pmatrix} -\frac{7}{72} & \frac{5}{72} & -\frac{1}{36} & \frac{1}{24} \\ -\frac{1}{36} & \frac{1}{18} & -\frac{1}{36} & 0 \\ -\frac{1}{72} & \frac{1}{36} & -\frac{1}{24} & \frac{1}{36} \\ -\frac{1}{36} & \frac{1}{72} & 0 & \frac{1}{72} \\ \frac{7}{72} & \frac{1}{36} & -\frac{5}{72} & -\frac{1}{24} \\ \frac{1}{72} & \frac{1}{24} & -\frac{1}{36} & -\frac{1}{36} \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & -\frac{1}{18} & 0 \\ \frac{1}{36} & 0 & -\frac{1}{72} & -\frac{1}{36} \\ -\frac{1}{18} & \frac{1}{36} & 0 & \frac{1}{36} \\ -\frac{5}{72} & \frac{7}{72} & -\frac{1}{24} & \frac{1}{36} \\ -\frac{1}{72} & \frac{1}{36} & -\frac{1}{36} & 0 \\ -\frac{1}{36} & \frac{1}{72} & -\frac{1}{36} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{72} & -\frac{1}{36} & -\frac{1}{36} \\ \frac{1}{36} & \frac{7}{72} & -\frac{1}{24} & -\frac{5}{72} \\ 0 & \frac{1}{36} & -\frac{1}{36} & -\frac{1}{72} \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & 0 & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{24} & \frac{1}{36} & -\frac{1}{72} & \frac{1}{36} \\ 0 & \frac{1}{36} & -\frac{1}{36} & \frac{1}{72} \\ -\frac{1}{36} & \frac{1}{24} & -\frac{7}{72} & \frac{5}{72} \\ -\frac{1}{36} & 0 & -\frac{1}{36} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & 0 & -\frac{1}{36} & -\frac{1}{36} \\ \frac{1}{72} & \frac{1}{36} & -\frac{1}{36} & 0 \\ \frac{5}{72} & \frac{1}{24} & -\frac{7}{72} & -\frac{1}{36} \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & -\frac{1}{72} & -\frac{1}{24} \\ -\frac{1}{36} & 0 & -\frac{1}{72} & \frac{1}{36} \\ -\frac{1}{36} & \frac{1}{24} & -\frac{1}{36} & \frac{1}{72} \\ 0 & \frac{1}{36} & -\frac{1}{18} & \frac{1}{36} \\ -\frac{1}{24} & \frac{1}{36} & -\frac{5}{72} & \frac{7}{72} \\ \frac{1}{72} & \frac{1}{72} & 0 & -\frac{1}{36} \\ 0 & \frac{1}{18} & -\frac{1}{36} & -\frac{1}{36} \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{72} \\ \frac{1}{24} & \frac{5}{72} & -\frac{1}{36} & -\frac{7}{72} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{C}_2^e = \begin{pmatrix} -\frac{1}{72} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & -\frac{1}{24} \\ \frac{1}{72} & -\frac{1}{36} & \frac{1}{72} & 0 \\ -\frac{1}{72} & 0 & \frac{1}{36} & -\frac{1}{36} \\ \frac{1}{72} & 0 & \frac{1}{72} & -\frac{1}{72} \\ \frac{1}{72} & -\frac{1}{36} & -\frac{1}{36} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{72} & -\frac{1}{36} & 0 & \frac{1}{36} \\ -\frac{1}{72} & -\frac{1}{72} & \frac{1}{36} & 0 \\ -\frac{1}{72} & -\frac{1}{72} & 0 & \frac{1}{36} \\ -\frac{1}{36} & \frac{1}{72} & 0 & \frac{1}{72} \\ \frac{1}{36} & -\frac{1}{72} & -\frac{1}{24} & \frac{1}{36} \\ 0 & \frac{1}{72} & -\frac{1}{36} & \frac{1}{72} \\ 0 & -\frac{1}{72} & -\frac{1}{36} & \frac{1}{36} \\ \frac{1}{36} & -\frac{1}{72} & -\frac{1}{36} & 0 \\ \frac{1}{36} & -\frac{1}{72} & -\frac{1}{24} & \frac{1}{36} \\ \frac{1}{72} & \frac{1}{72} & -\frac{1}{36} & 0 \\ \frac{1}{72} & \frac{1}{72} & 0 & -\frac{1}{36} \\ -\frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{72} & 0 \\ -\frac{1}{72} & \frac{1}{36} & -\frac{1}{72} & 0 \\ -\frac{1}{36} & \frac{1}{24} & \frac{1}{72} & -\frac{1}{36} \\ -\frac{1}{72} & 0 & -\frac{1}{72} & \frac{1}{36} \\ \frac{1}{36} & 0 & -\frac{1}{72} & -\frac{1}{72} \\ 0 & \frac{1}{36} & -\frac{1}{72} & -\frac{1}{72} \\ -\frac{1}{36} & \frac{1}{24} & \frac{1}{72} & -\frac{1}{36} \\ 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{72} & -\frac{1}{36} \\ \frac{1}{36} & -\frac{1}{72} & 0 & -\frac{1}{72} \\ \frac{1}{36} & -\frac{1}{36} & 0 & \frac{1}{72} \\ 0 & -\frac{1}{72} & \frac{1}{36} & -\frac{1}{72} \\ \frac{1}{24} & -\frac{1}{36} & -\frac{1}{36} & \frac{1}{72} \\ -\frac{1}{72} & 0 & \frac{1}{72} & \frac{1}{72} \\ 0 & -\frac{1}{36} & \frac{1}{72} & \frac{1}{72} \\ -\frac{1}{36} & 0 & \frac{1}{36} & -\frac{1}{72} \\ -\frac{1}{24} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & -\frac{1}{72} \end{pmatrix}.$$

5.5 Zeitschrittweite

In unserem Programm wollen wir unerwünschte Oszillationen durch die numerische Approximationslösung vermeiden und müssen somit Stabilitätsbedingungen an die Gitterweite h und die Zeitschrittweite Δt stellen. Häufig werden folgende Einschränkungen, wie bei [Tome 94], zu Grunde gelegt:

$$\frac{2\Delta t}{Re} < \left(\frac{1}{\Delta x_1^2} + \frac{1}{\Delta x_2^2} \right)^{-1}, \quad (5.25)$$

$$|u_{1,max}| \Delta t < \Delta x_1, \quad (5.26)$$

$$|u_{2,max}| \Delta t < \Delta x_2. \quad (5.27)$$

Δx_1 und Δx_2 sind hierbei unserem h gleichzusetzen ($\Delta x_1 = \Delta x_2 = h$). Die Terme $u_{1,max}$ und $u_{2,max}$ entsprechen den höchsten Geschwindigkeiten, die zum Zeitpunkt der Berechnung der Schrittweite vorhanden sind. Die Ungleichungen 5.26 und 5.27 sorgen dafür, dass die einzelnen Partikel des Fluids in einem Zeitschritt Δt nicht mehr als eine Gitterweite Δx_1 bzw. Δx_2 zurücklegen können. Da in unseren Testszenarien die Geschwindigkeit in x_2 -Richtung mit Null initialisiert wird, und diese in den weiteren Zeitschritten die Maximalgeschwindigkeit von u_1 nicht übertrifft, können wir die Bedingung, die $u_{2,max}$ enthält, außer Acht lassen. Zuletzt wollen wir nun die in unserem Programm verwendete Berechnung für die Zeitschrittweite angeben:

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{Re \cdot h^2}{4}, \frac{h}{|u_{1,max}|} \right\}. \quad (5.28)$$

Der Zusatz $\frac{1}{2}$ auf der rechten Seite der Ungleichung stellt einen Sicherheitsfaktor dar zur Verhinderung von Stabilitätsproblemen. Für eine genauere Stabilitätsanalyse sei der Leser auf [Peyret 83] verwiesen. Man könnte die Zeitschrittweite für jeden Zeitschritt mit einem adaptiven Verfahren neu berechnen. In unserem Fall wird diese jedoch nur einmal zu Beginn bestimmt. Dies ist möglich, da wir als Anfangsgeschwindigkeit die Maximalgeschwindigkeit wählen.

5.6 Rand- und Anfangsbedingungen

Die letzten Details für die Aufstellung unseres Algorithmus zur Lösung der Navier-Stokes Gleichungen sind die Randbedingungen für die Druckberechnung und die Initialisierung der einzelnen Testszenarien. Dies soll in den folgenden Abschnitten behandelt werden.

5.6.1 Randbedingungen für den Druck

Im kontinuierlichen, ebenso wie im diskreten Fall, betreffen die Randbedingungen bei den Navier-Stokes Gleichungen lediglich die Geschwindigkeitswerte. Für den Druck sind keine expliziten Vorgaben vorhanden. Da dieser jedoch iterativ über die Druck-Poissongleichung für den nächsten Zeitschritt berechnet werden muss, sind auch hierfür Randbedingungen notwendig.

Wir betrachten dazu den Grenzfall $h \rightarrow 0$. Anhand der konsistenten⁵ diskreten Druck-Poissongleichung können wir am Rand herleiten, wie unsere Berechnungsvorschrift in diesem Fall zu interpretieren ist. Genauere Berechnungen zu den verschiedenen Randmöglichkeiten befinden sich im Anhang von [Neckel 05]. Aus den Ergebnissen dieser Rechnungen folgt, dass die Geschwindigkeit und der Druck die Randbedingungen gerade vertauschen, d.h. wenn \mathbf{u} Dirichlet-Randbedingungen besitzt, hat der Druck \mathbf{p} Neumann-Randbedingungen und umgekehrt.

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \left[-\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mu \Delta \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] \text{ auf } \Gamma_D, \quad (5.29)$$

$$\mathbf{p} = \mu \frac{\partial u_n}{\partial n} - f_n \text{ auf } \Gamma_N. \quad (5.30)$$

Die Gleichung 5.29 stellt die Dirichlet-Randbedingungen für den Druck dar und 5.30 dessen Neumann-Randbedingungen.

⁵Ein numerisches Verfahren ist konsistent, wenn der Algorithmus tatsächlich das gegebene Problem löst und nicht ein anderes.

5.6.2 Anfangsbedingungen

Als veränderliche Größe muss neben der Ortsvariablen auch die Zeit berücksichtigt werden. Den Zustand eines Fluids zum Anfangszeitpunkt t_0 , der typischerweise als $t_0 = 0$ gewählt wird, wird durch die Anfangsbedingungen beschrieben. Wie bereits im vorhergehenden Abschnitt über die Randbedingungen für den Druck erwähnt, reichen uns Vorgaben für die Geschwindigkeit. Der Druck wird passend dazu berechnet.

Wir wollen an dieser Stelle kurz angeben, welche Anfangsbedingungen für unsere Testszenarien gewählt werden.

Mit den zu Beginn der Simulation gegebenen Werten für die Geschwindigkeit und den Druck muss, wie für jeden weiteren Zeitschritt, die Kontinuitätsgleichung erfüllt sein. Die Anfangsbedingungen sollten also divergenzfrei sein.

Der Druck ist bei jedem unserer Szenarien zum Zeitpunkt t_0 mit Null initialisiert. Weiterhin sei die Geschwindigkeit zu Beginn der Simulation Null, außer am Einlass. Hier müssen bestimmte Geschwindigkeiten in Form von inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen vorgegeben werden. Durch diese, nicht divergenzfreie Initiallösung ergibt sich eine Unstetigkeit in den ersten Zeitschritten. Erst nach einer gewissen Zeit ist die Divergenzfreiheit der Lösung gegeben. Das wird durch den Zusatzterm $\gamma \mathbf{M} \frac{\mathbf{u}^{(n)}}{\Delta t}$ mit $\gamma = 1$ in der diskreten Druck-Poissongleichung 5.9 geregelt. Anfänglich ist das Strömungsfeld zwar unphysikalisch, was aber nicht stört, weil wir letztlich den Algorithmus bis zur stationären Lösung fortsetzen. Diese ist dann physikalisch korrekt.

5.7 Lösungsalgorithmus

In den vorhergehenden Abschnitten wurde folgender Algorithmus für die Lösung der Navier-Stokes Gleichungen entwickelt. Die angewandte Methode für die Druckiteration ist [Neckel 05] zu entnehmen und wir auch in [Knabner 00] erklärt.

Algorithmus zur Strömungssimulation

Initialisierung ($\mathbf{u}, \mathbf{p}, \Delta t, t = 0, n = 0$)

while $t \leq t_{end}$ **do**

 Berechne $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{D}\mathbf{u} + \mathbf{C}(\mathbf{u})\mathbf{u}$ für den n -ten Zeitschritt

while Abbruchkriterium der Druckiteration nicht erreicht, $k = 1, 2, \dots$ **do**

 Iterationsschritt auf Druck-Poissongleichung 5.9

$$\mathbf{M}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{M}^T \mathbf{p}_h^{(n)} = \mathbf{M}\mathbf{A}^{-1} \left(\mathbf{C}(\mathbf{u}_h^{(n)})\mathbf{u}_h^{(n)} + \mathbf{D}\mathbf{u}_h^{(n)} \right) - \gamma \mathbf{M} \frac{\mathbf{u}_h^{(n)}}{\Delta t}$$

end while

 Berechne \mathbf{u} für den $(n + 1)$ -ten Zeitschritt mit der Finite-Element-Methode

 Zeitfortschaltung: $t = t + \Delta t$, $n = n + 1$

end while

Kapitel 6

Numerische Durchführung und Test auf Konsistenz

In diesem Kapitel geht es zunächst darum, die Matrixeigenschaften für die divergenzfreien Ansatzfunktionen zu testen. Die Matrizen müssen dafür von der elementweisen in die globale Darstellung umgerechnet werden. Danach wird überprüft, ob der Algorithmus für die globale Form der Matrizen seine Aufgabe richtig erfüllt. Damit sind die Voraussetzungen geschaffen, die diskreten Terme der Navier-Stokes Gleichungen zu testen. Zudem muss die Erfüllung der Erhaltungssätze mit den jeweiligen Ansatzfunktionen überprüft werden. Die mit den verschiedenen Ansatzfunktionen erreichten Ergebnisse werden anschließend gegenübergestellt. Dabei steht die Berechnung der kinetischen Energie im Mittelpunkt. Im Gegensatz zu der Massen- und Impulserhaltung wird von Interesse sein, ob sich Unterschiede beim Vergleich der Energieergebnisse der verschiedenen Ansatzfunktionen feststellen lassen.

6.1 Globale Darstellungsform der diskreten Terme

Um einige später folgende Tests, vor allem die Überprüfung der Matrixeigenschaften von $\mathbf{C}(\mathbf{u})$ und \mathbf{D} , durchführen zu können, ist die globale Darstellung der Matrizen der diskretisierten Navier-Stokes Gleichungen erforderlich. Aus diesem Grund soll hier kurz erklärt werden, wie das in unserem Programm umgesetzt wird.

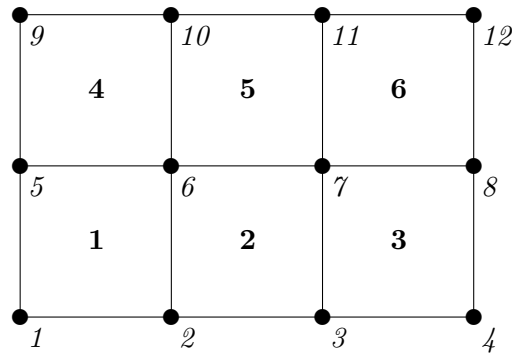


Abbildung 6.1: Globale Zellen- und Knotennummerierung anhand eines Beispiels.

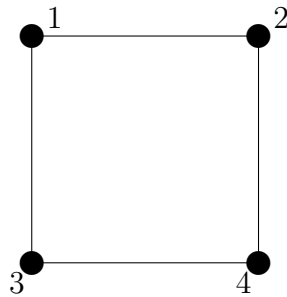


Abbildung 6.2: Zellnummerierung für eine lokal betrachtete Zelle.

Die Zellen eines Szenarios sind in unserem Programm, wie in Abbildung 6.1 gezeigt wird, von unten nach oben und je Zeile von links nach rechts durchnummeriert. Das gleiche gilt auch für die Gitterknoten. Diese Nummerierung nennt sich lexikographische Nummerierung.

Des Weiteren brauchen wir zur Durchführung der Globalisierung auch die Nummerierung aus unserem Programm für eine lokale Zelle. Dies ist in Abbildung 6.2 zu sehen. Hierbei handelt es sich um eine lexikographische Nummerierung von oben nach unten.

Von diesen zwei Grundlagen ausgehend, wird in dem Algorithmus für die Transformation von lokaler in globale Matrix eine Zelle mit globaler Nummerierung nach der anderen abgelaufen, wobei in einem 4×1 -Vektor die globalen Gitterknotennummern einer Zelle gespeichert werden. Dabei ist zu beachten, dass der erste Eintrag dem Knoten 1 einer lokalen Zelle, der zweite Eintrag dem Knoten

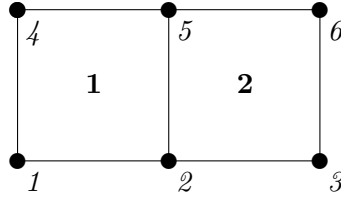


Abbildung 6.3: Beispielszenario zur Berechnung einer globalen Matrix.

2 einer lokalen Zelle, usw. entspricht. Angenommen, wir verwenden das Szenario aus Abbildung 6.1 und beginnen mit der Zelle 1, so erhalten wir folgenden Vektor g für die globalen Zellknoten:

$$g = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Auf die im Vektor gespeicherten globalen Zellknoten werden nun an deren Stelle in der globalen Matrix die dazugehörigen Werte der lokalen Matrix übertragen. In unserem Beispiel aus Abbildung 6.1 wäre die globale Matrix im Fall für den Diffusionsterm oder die Massenmatrix eine 12×12 -Matrix. Für jede Geschwindigkeitsrichtung gibt es also 6 Werte. Zelle 1 beeinflusst somit lediglich die Zeilen 1, 2, 4 und 5 für die Geschwindigkeit u_1 und die Zeilen 7, 8, 10 und 11 für die Geschwindigkeit u_2 der globalen Matrix. Für eine Darstellung nehmen wir nun die lokale Massenmatrix $\mathbf{A}^e = a_{i,j}$ mit $1 \leq i, j \leq 8$. Für die globale Matrixzeile 4 müssen wir in der lokalen Matrix die erste Zeile betrachten, da der Knoten 4 in lokaler Betrachtungsform dem ersten Zellknoten entspricht. Der Term $a_{1,1}$ aus der lokalen Matrix wird an vierter Stelle in der vierten Zeile der globalen Matrix geschrieben. Der zweite Term der lokalen Matrix $a_{1,2}$ entspricht in globaler Darstellung dem fünften Gitterknoten und wird deshalb an fünfter Stelle in der vierten Zeile geschrieben. Nachdem die erste Zelle abgelaufen wurde, sieht die

globale Matrix \mathbf{A} wie folgt aus:

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} a_{3,3} & a_{3,4} & 0 & a_{3,1} & a_{3,2} & 0 & a_{3,7} & a_{3,8} & 0 & a_{3,5} & a_{3,6} & 0 \\ a_{4,3} & a_{4,4} & 0 & a_{4,1} & a_{4,2} & 0 & a_{4,7} & a_{4,8} & 0 & a_{4,5} & a_{4,6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{1,3} & a_{1,4} & 0 & \textcolor{red}{a}_{1,1} & \textcolor{red}{a}_{1,2} & 0 & a_{1,7} & a_{1,8} & 0 & a_{1,5} & a_{1,6} & 0 \\ a_{2,3} & a_{2,4} & 0 & a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & a_{2,7} & a_{2,8} & 0 & a_{2,5} & a_{2,6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline a_{7,3} & a_{7,4} & 0 & a_{7,1} & a_{7,2} & 0 & a_{7,7} & a_{7,8} & 0 & a_{7,5} & a_{7,6} & 0 \\ a_{8,3} & a_{8,4} & 0 & a_{8,1} & a_{8,2} & 0 & a_{8,7} & a_{8,8} & 0 & a_{8,5} & a_{8,6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{5,3} & a_{5,4} & 0 & a_{5,1} & a_{5,2} & 0 & a_{5,7} & a_{5,8} & 0 & a_{5,5} & a_{5,6} & 0 \\ a_{6,3} & a_{6,4} & 0 & a_{6,1} & a_{6,2} & 0 & a_{6,7} & a_{6,8} & 0 & a_{6,5} & a_{6,6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Die zwei erwähnten Beispieleinträge sind rot dargestellt.

So fährt man für jeden globalen Gitterknoten dieser Zelle fort. Hierbei ist zu beachten, dass die Geschwindigkeitseinträge von u_2 nicht außer Acht gelassen werden. Dieses Prozedere wird mit jeder Zelle des Gebietes durchgeführt, wodurch man am Ende des Algorithmus die komplette globale Matrix erhält. In unserem Beispiel gehören die Gitterpunkte 2 und 5 beiden Zellen an. Dadurch kann es geschehen, dass sich die Einträge, die sich nach der Berechnung für die erste Zelle ergeben, wieder ändern können. Fügen wir nun die Daten der zweiten Zelle aus unserem Beispiel in die globale Matrix ein, würde das Ergebnis so aussehen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{ul} & \mathbf{A}_{ur} \\ \mathbf{A}_{dl} & \mathbf{A}_{dr} \end{pmatrix}, \quad \text{mit}$$

$$\mathbf{A}_{ul} = \begin{pmatrix} a_{3,3} & a_{3,4} & 0 & a_{3,1} & a_{3,2} & 0 \\ a_{4,3} & a_{3,3} + a_{4,4} & a_{3,4} & a_{4,1} & a_{3,1} + a_{4,2} & a_{3,2} \\ 0 & a_{4,3} & a_{4,4} & 0 & a_{4,1} & a_{4,2} \\ a_{1,3} & a_{1,4} & 0 & a_{1,1} & a_{1,2} & 0 \\ a_{2,3} & a_{1,3} + a_{2,4} & a_{1,4} & a_{2,1} & a_{1,1} + a_{2,2} & a_{1,2} \\ 0 & a_{2,3} & a_{2,4} & 0 & a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{ur} &= \begin{pmatrix} a_{3,7} & a_{3,8} & 0 & a_{3,5} & a_{3,6} & 0 \\ a_{4,7} & a_{3,7} + a_{4,8} & a_{3,8} & a_{4,5} & a_{3,5} + a_{4,6} & a_{3,6} \\ 0 & a_{4,7} & a_{4,8} & 0 & a_{4,5} & a_{4,6} \\ a_{1,7} & a_{1,8} & 0 & a_{1,5} & a_{1,6} & 0 \\ a_{2,7} & a_{1,7} + a_{2,8} & a_{1,8} & a_{2,5} & a_{1,5} + a_{2,6} & a_{1,6} \\ 0 & a_{2,7} & a_{2,8} & 0 & a_{2,5} & a_{2,6} \end{pmatrix}, \\
\mathbf{A}_{dl} &= \begin{pmatrix} a_{7,3} & a_{7,4} & 0 & a_{7,1} & a_{7,2} & 0 \\ a_{8,3} & a_{7,3} + a_{8,4} & a_{7,4} & a_{8,1} & a_{7,1} + a_{8,2} & a_{7,2} \\ 0 & a_{8,3} & a_{8,4} & 0 & a_{8,1} & a_{8,2} \\ a_{5,3} & a_{5,4} & 0 & a_{5,1} & a_{5,2} & 0 \\ a_{6,3} & a_{5,3} + a_{6,4} & a_{5,4} & a_{6,1} & a_{5,1} + a_{6,2} & a_{5,2} \\ 0 & a_{6,3} & a_{6,4} & 0 & a_{6,1} & a_{6,2} \end{pmatrix}, \quad \text{und} \\
\mathbf{A}_{dr} &= \begin{pmatrix} a_{7,7} & a_{7,8} & 0 & a_{7,5} & a_{7,6} & 0 \\ a_{8,7} & a_{7,7} + a_{8,8} & a_{7,8} & a_{8,5} & a_{7,5} + a_{8,6} & a_{7,6} \\ 0 & a_{8,7} & a_{8,8} & 0 & a_{8,5} & a_{8,6} \\ a_{5,7} & a_{5,8} & 0 & a_{5,5} & a_{5,6} & 0 \\ a_{6,7} & a_{5,7} + a_{6,8} & a_{5,8} & a_{6,5} & a_{5,5} + a_{6,6} & a_{5,6} \\ 0 & a_{6,7} & a_{6,8} & 0 & a_{6,5} & a_{6,6} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

6.2 Matriceigenschaften

Nachdem die Methode zur Berechnung der globalen Matrizen vorgestellt wurde, können wir an den diskreten Termen der Navier-Stokes Gleichungen Tests durchführen. Des Weiteren wird die Matrix $\mathbf{Q} = \mathbf{M}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{M}^T$ für die Lösung der diskreten Druck-Poissongleichung neu berechnet und mit der im Programm bereits vorhandenen verglichen. Anschließend werden die Geschwindigkeitsterme der Impulsgleichung noch genauer untersucht. Zum Abschluss findet man eine Tabelle mit den einzelnen Tests und ihren Ergebnissen.

Da in unseren Rechnungen vorwiegend die gelumpfte Massenmatrix zum Einsatz kommt, wird diese mit \mathbf{A} bezeichnet. Sollte einmal die vollständige Massenmatrix verwendet werden, wird darauf hingewiesen.

Weil eine gelumpfte Massenmatrix diagonal ist, kann man diese explizit inver-

tieren, wodurch Speicher- und Rechenkosten eingespart werden. Dies lohnt sich gegenüber dem Verlust an Genauigkeit.

6.2.1 Matrix \mathbf{Q}

Eine notwendige Voraussetzung zur richtigen Berechnung von \mathbf{Q} ist die Erfüllung der Massenerhaltung, also $\mathbf{M}\mathbf{u} = 0$. Da \mathbf{u} eine globale Variable ist, muss auch \mathbf{M} als globale Matrix geschrieben werden. Dabei wird \mathbf{M} in zwei Teilmatrizen in x_1 - und x_2 -Richtung zerlegt. Wir erhalten somit \mathbf{M}_{x_1} und \mathbf{M}_{x_2} als globale Teile von \mathbf{M} . Zur Überprüfung der Massenerhaltung haben wir einen Geschwindigkeitsvektor aufgestellt, mit dem die Divergenzterme multipliziert werden. Das Ergebnis erfüllt die Massenerhaltung:

$$\mathbf{M}_{x_1} u_1 + \mathbf{M}_{x_2} u_2 = 0. \quad (6.1)$$

Die Zweiteilung bei \mathbf{M} geschieht, damit man die gelumppte Matrix \mathbf{A} bei der Berechnung von $\tilde{\mathbf{Q}} (= \mathbf{M}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{M}^T)^{1\ 2}$ auch in beide Koordinatenrichtungen unterteilen kann. Damit werden unnötige Multiplikationen mit Null vermieden. Zu beachten ist jedoch, dass dies nur möglich ist, wenn die globalen Matrizen in vier Teilmatrizen eingeteilt werden können:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix}.$$

Durch diese reduzible³ globale Darstellung kann $\tilde{\mathbf{Q}}$ als eine direkte Summe der irreduziblen Teilmatrizen berechnet werden:

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{M}_{x_1} \mathbf{A}_{x_1}^{-1} \mathbf{M}_{x_1}^T + \mathbf{M}_{x_2} \mathbf{A}_{x_2}^{-1} \mathbf{M}_{x_2}^T.$$

Die Matrizen \mathbf{A}_{x_2} und \mathbf{A}_{x_1} sind identisch. Im Anschluss an diese Berechnung wird das neu erhaltene $\tilde{\mathbf{Q}}$ mit dem im Programm lokal aufgestellten \mathbf{Q} verglichen. Dieser Vergleich erfolgt beim Nischenströmungsszenario und dem freien

¹Im Normalfall spielt die Breite h der Zellen bei den einzelnen Matrizen auch eine Rolle, doch in diesem Fall hat sich diese herausgekürzt: $\tilde{\mathbf{Q}} = h\mathbf{M}_{\frac{1}{h^2}}\mathbf{A}^{-1}h\mathbf{M}^T$

²Da wir mit der gelumpten Matrix \mathbf{A} rechnen, haben wir unser \mathbf{Q} in $\tilde{\mathbf{Q}}$ umbenannt.

³Eine $d \times d$ -Matrix $\mathbf{B} = (b_{ij})$ mit $1 \leq i, j \leq d$ heißt reduzibel, wenn eine Zerlegung von $\{1, 2, \dots, d\}$ in nicht leere Mengen \mathbf{G} und \mathbf{G}' existiert, so dass $b_{ij} = 0$ für alle $i \in \mathbf{G}$ und $j \in \mathbf{G}'$ gilt, und sonst irreduzibel.

Kanal für mehrere Gebietsgrößen und hat bei allen durchgeführten Tests eine Übereinstimmung der beiden Matrizen ergeben (Tests bis zu 50×50 Gitter Szenarien und für einen 10×20 Kanal).

6.2.2 Matrix \mathbf{A}

Die Aufstellung des globalen \mathbf{A} bereitet keine besonderen Schwierigkeiten, da wir wissen, dass \mathbf{A}_{x_1} und \mathbf{A}_{x_2} gleich sind und der Rest Null sein muss. Daraus folgt:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{x_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{x_1} \end{pmatrix}.$$

Diese globale Matrix wird mit der von Anfang an komplett globalisierten Matrix verglichen. Das Ergebnis ist, wie gewünscht, gleich.

Vergleicht man nun die gelumpte Massenmatrix mit den wahren Massenmatrizen, die durch die beiden Ansatzfunktionen entstehen, ist das Ergebnis, wie erwartet, nicht identisch. Anhand der Tabelle 6.1 sieht man, dass der Fehler

Höhe h	$\ \mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}}\ _2$ für bilineare Ansatzfunktionen	$\ \mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}}\ _2$ für divergenzfreie Ansatzfunktionen
$\frac{1}{4}$	0.0516	0.0425
$\frac{1}{8}$	0.0136	0.0114
$\frac{1}{16}$	0.0035	0.0029

Tabelle 6.1: Vergleich der gelumpten Massenmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ mit den echten Matrizen \mathbf{A} der verschiedenen Ansatzfunktionen.

ungefähr im Bereich von $O(h^2)$ liegt. Bei gröber werdendem Gitter bedeutet dies, dass der Fehler exponentiell steigt.

Nachdem \mathbf{A} und \mathbf{M} globalisiert wurden, müssen auch die Matrizen $\mathbf{C}^e(\mathbf{u})$ und \mathbf{D}^e in ihre globale Form gebracht werden.

6.2.3 Matrix \mathbf{D}

Die Diffusionsmatrix \mathbf{D} wird auch zuerst in den einzelnen Koordinatenachsen x_1 und x_2 globalisiert, wobei die entstehende Matrix der x_1 -Richtung gleich der Matrix aus x_2 -Richtung ist. \mathbf{D} sieht wie folgt aus:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{x_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{x_1} \end{pmatrix}.$$

Diese Aufstellung wird auch, wie bei der Massenmatrix, mit der komplett global aufgestellten Diffusionsmatrix verglichen. Die Matrizen sind identisch.

Um die Symmetrieeigenschaft von \mathbf{D} zu überprüfen, reicht es, \mathbf{D}_{x_1} auf Symmetrie zu testen. Wie erwartet erhalten wir für den freien Kanal und die Nischenströmung im Fall der divergenzfreien Ansatzfunktionen die gewünschte Symmetrie. Auch die nicht erfüllte Symmetrie bei den bilinearen Ansatzfunktionen war vorherzusehen.

6.2.4 Matrix $\mathbf{C}(\mathbf{u})$

Die Konvektionsmatrix $\mathbf{C}(\mathbf{u})$ sollte für die divergenzfreien Ansatzfunktionen antisymmetrisch sein. Ändert man nach der globalen Aufstellung von $\mathbf{C}(\mathbf{u})$ nichts an der resultierenden Matrix, ist diese Eigenschaft nicht erfüllt, unabhängig davon, ob man sich im freien Kanal oder in einem Nischenströmungsszenario befindet. Das liegt daran, dass die Randpunkte noch Werte in der Matrix liefern, die sich nicht eliminieren.

Um nun die Antisymmetrie von $\mathbf{C}(\mathbf{u})$ zu erreichen, werden alle untereinander abhängigen Dirichlet-Randpunkte Null gesetzt. Dirichletknoten sind dann voneinander abhängig, wenn diese eine gemeinsame Kante besitzen. In der Abbildung 6.4 ist beispielsweise ein Szenario mit Dirichlet-Randknoten dargestellt. Diese sind mit der Farbe Rot gekennzeichnet. Im Nischenströmungsszenario ist der Knoten 6 ein Dirichlet-Randknoten, im freien Kanal jedoch ein Neumann-Randknoten. Betrachtet man nun die Gitterpunkte der Abbildung 6.4 erstmal nur mit Dirichleträndern, sieht man, dass zum Beispiel die Dirichlet-Randknoten 1 und 4 voneinander abhängig sind. Zur Darstellung der Veränderung der globalen Matrix $\mathbf{C}(\mathbf{u})$ sei diese wie in Abbildung 6.5 darge-

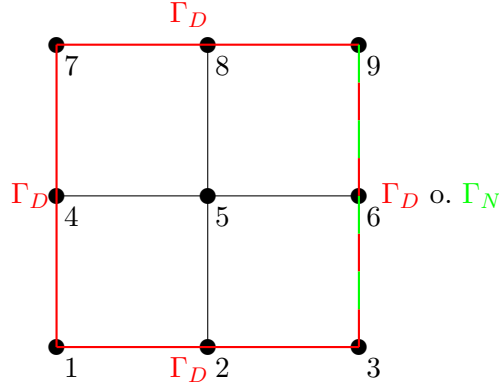


Abbildung 6.4: Randknotenkennzeichnung für die Erklärung welche Elemente der Matrix $\mathbf{C}(\mathbf{u})$ der divergenzfreen Ansatzfunktionen eliminiert werden müssen, damit die Antisymmetrie erreicht werden kann.

$$\mathbf{C}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{4,4} & C_{4,5} & 0 & C_{4,7} & C_{4,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{4,16} & C_{4,17} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{5,4} & 0 & C_{5,6} & C_{5,7} & 0 & C_{5,9} & 0 & 0 & 0 & C_{5,16} & C_{5,17} & C_{5,18} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{6,5} & C_{6,6} & 0 & C_{6,8} & C_{6,9} & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{6,17} & C_{6,18} \\ 0 & 0 & 0 & C_{7,4} & C_{7,5} & 0 & C_{7,7} & C_{7,8} & 0 & 0 & 0 & C_{7,13} & C_{7,14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{8,4} & 0 & C_{8,6} & C_{8,7} & 0 & C_{8,9} & 0 & 0 & C_{8,13} & C_{8,14} & C_{8,15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{9,5} & C_{9,6} & 0 & C_{9,8} & C_{9,9} & 0 & 0 & 0 & C_{9,14} & C_{9,15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{13,7} & C_{13,8} & 0 & 0 & C_{13,13} & C_{13,14} & 0 & C_{13,16} & C_{13,17} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{14,7} & C_{14,8} & C_{14,9} & 0 & 0 & C_{14,13} & 0 & C_{14,15} & C_{14,16} & 0 & C_{14,18} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{15,8} & C_{15,9} & 0 & 0 & 0 & C_{15,14} & C_{15,15} & 0 & C_{15,17} & C_{15,18} \\ 0 & 0 & 0 & C_{16,4} & C_{16,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{16,13} & C_{16,14} & 0 & C_{16,16} & C_{16,17} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{17,4} & C_{17,5} & C_{17,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{17,13} & 0 & C_{17,15} & C_{17,16} & 0 & C_{17,18} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{18,5} & C_{18,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{18,14} & C_{18,15} & 0 & C_{18,17} & C_{18,18} \end{pmatrix}.$$

Abbildung 6.5: Die Konvektionsmatrix $\mathbf{C}(\mathbf{u})$ für ein 2x2 Nischenströmungsszenario.

stellt. Die Einträge 1, 4, 10 und 13 der ersten, vierten, zehnten und dreizehnten Zeile müssen in der globalen Matrix $\mathbf{C}(\mathbf{u})$ auf Grund der Abhängigkeit von Knoten 1 und 4 Null gesetzt werden (in unserem Fall sind die Elemente 1 und 10 in jeder Zeile bereits Null). Die Matrix ohne diesen reellen Einträgen (in rot gekennzeichneten) und allen anderen voneinander abhängigen Dirichlet-Randknoten wird in Abbildung 6.6 dargestellt. Testet man nochmals die Matrix auf Antisymmetrie, erhält man diese für das angegebene Beispiel⁴ aber nur un-

⁴Diese Beispielmatrix hat besonders wenige Einträge, da wir nur einen inneren Knoten haben der für Werte sorgt.

6.2.5 Term \mathbf{F}

Im ursprünglichen Programm wird $\mathbf{F} = \mathbf{C}(\mathbf{u})\mathbf{u} + \mathbf{D}\mathbf{u}$ lokal berechnet. Ziel ist es, dass das globale \mathbf{F} numerisch mit dem lokalen \mathbf{F} übereinstimmt.

Um dies zu überprüfen, werden zwei Tests angewandt, wobei diese einmal für verschiedene Nischenströmungsszenarien und zum zweiten für verschiedene freie Kanäle durchgeführt werden. Bei diesen Tests ist bei den Ergebnissen, unabhängig davon, ob die Werte über bilineare oder divergenzfreie Ansatzfunktionen approximiert werden, kein Unterschied zu erkennen.

Zuerst wird das globale \mathbf{F} mit den noch unveränderten Matrizen $\mathbf{C}(\mathbf{u})$ und \mathbf{D} berechnet und mit dem lokal aufgestellten \mathbf{F} verglichen. Dieser Test fällt zufriedenstellend aus.

Bei einem zweiten Test werden zuerst bei dem lokalen \mathbf{F} die Dirichletknotenelemente Null gesetzt. Für die Aufstellung des globalen \mathbf{F} 's werden bei den Matrizen $\mathbf{C}(\mathbf{u})$ und \mathbf{D} die Einträge, die ausschließlich von Dirichletknoten stammen, wie bereits im vorhergehenden Abschnitt an der Matrix $\mathbf{C}(\mathbf{u})$ gezeigt, durch Nulleinträge ausgetauscht. Außerdem wird noch überprüft, ob die Matrix \mathbf{D} ihre Symmetrie behalten hat, was bestätigt werden kann. Im Anschluss daran, setzt man bei dem entstehenden globalen \mathbf{F} ebenfalls die Dirichletknoten gleich Null und vergleicht die beiden \mathbf{F} 's miteinander. Erneut sind diese, wie erwartet, identisch.

Zum Abschluß dieses Abschnittes werden noch die Tabellen 6.2 und 6.3 aufgeführt, in denen die Testergebnisse für die verschiedenen Ansatzfunktionen zu sehen sind. Hierbei wird der Test mit der abgeänderten Matrix $\mathbf{C}(\mathbf{u})$ durchgeführt. Aufgrund einer quadratischen Form eines Gebietes können Symmetrieeffekte vor allem bei groben Gittern entstehen. Dadurch können die Testergebnisse eventuell nicht auf anders-förmige Szenarien verallgemeinert werden. Deshalb werden die Tests aus Sicherheitsgründen auch auf rechteckigen (in Einströmrichtung x_1 längere Randkanten als in Richtung x_2) Testszenarien durchgeführt.

Überblick der Tests für die divergenzfreien Ansatzfunktionen				
Tests	Driven Cavity		Free Channel	
	quadratisch	rechteckig	quadratisch	rechteckig
Test von $\mathbf{M}\mathbf{u} = 0$	✓	✓	✓	✓
Test von A	✓	✓	✓	✓
Test $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$	✓	✓	✓	✓
Test $\mathbf{C} = -\mathbf{C}^T$	✓	✓	✗	✗
Test von F	✓	✓	✓	✓

Tabelle 6.2: Checkliste der Matrizen-Tests für die divergenzfreien Ansatzfunktionen

Überblick der Tests für die bilinearen Ansatzfunktionen				
Tests	Driven Cavity		Free Channel	
	quadratisch	rechteckig	quadratisch	rechteckig
Test von $\mathbf{M}\mathbf{u} = 0$	✓	✓	✓	✓
Test von A	✓	✓	✓	✓
Test $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$	✗	✗	✗	✗
Test $\mathbf{C} = -\mathbf{C}^T$	✗	✗	✗	✗
Test von F	✓	✓	✓	✓

Tabelle 6.3: Checkliste der Matrizen-Tests für die bilinearen Ansatzfunktionen

6.3 Massenerhaltung

Das Ziel dieser Arbeit ist das Überprüfen der Erhaltungssätze unter der Anwendung der verschiedenen Ansatzfunktionen. Darin sollte sich ein Unterschied erweisen, so daß die neu entwickelten divergenzfreien Ansatzfunktionen ein besseres Resultat liefern. Als ersten Erhaltungssatz betrachten wir die Massenerhaltung. Durch die Kontinuitätsgleichung sollte diese bereits für beide Ansatzfunktionen erfüllt sein. Da unser Algorithmus auf der Chorinschen Projektionsmethode [Chorin 68] basiert, wird im Fall eines Fehlers bei der Massenerhaltung dieser durch den Term $\gamma \mathbf{M} \frac{\mathbf{u}^{(n)}}{\Delta t}$ mit $\gamma = 1$ in der Druckiteration korrigiert. Es

muss somit auf diesen Erhaltungssatz nicht weiter eingegangen werden.

Die Impulserhaltung und Energieerhaltung sollen in den folgenden Abschnitten analysiert werden. Dazu betrachten wir vorwiegend das Nischenströmungsszenario, nachdem wir bei diesem die Antisymmetrie von der Konvektionsmatrix $\mathbf{C}(\mathbf{u})$ durch eine kleine Abänderung herstellen konnten.

Bevor man sich mit der Evaluierung der Testdaten bezüglich der Erhaltungssätze befasst, muss die Stationarität des Testszenarios gegeben sein. Diese wird meist nach einer gewissen Anzahl von Zeitschritten erreicht. Davor müssen die Erhaltungssätze nicht zwingend erfüllt sein, denn durch die in Kapitel 5 definierten Anfangswerte unserer Szenarien erhalten wir einen Simulationsstart mit einer nicht divergenzfreien Initiallösung.

6.4 Impulserhaltung

In diesem Abschnitt wird die Überprüfung der Impulserhaltung im freien Kanal unter Anwendung der zwei verschiedenen Ansatzfunktionen der Finite-Element-Methode durchgeführt.

Dieser Erhaltungssatz kann, wie üblich, nur in einem stationären Szenario erfüllt sein. Die Impulserhaltung sagt nichts anderes aus, als dass die Gesamtkraft bzw. die Summe der Kräfte Null sein muss. Im Nischenströmungsszenario setzt sich diese Kraft ausschließlich aus den Kräften an der Wand zusammen. Im Fall des hier zu betrachtenden freien Kanals handelt es sich um die Kräfte am Eingang und an der Wand.

Da die Gesamtkraft aus den Termen $\mathbf{C}(\mathbf{u})\mathbf{u}$, $\mathbf{D}\mathbf{u}$ und $\mathbf{M}^T\mathbf{p}$ zusammengesetzt ist, muss ihre Größenordnung ungefähr im Bereich der Geschwindigkeits- und Druckänderung liegen. Um die Änderung der beiden Variablen \mathbf{u} und \mathbf{p} zu bestimmen, berechne man die L_2 -Norm von der Differenz von \mathbf{u} des vorhergehenden und des jetzigen Zeitschrittes und ebenso die L_2 -Norm von der Differenz von $\nabla\mathbf{p}$ des vorhergehenden und des jetzigen Zeitschrittes. Die Potenzen der Kraft- und L_2 -Norm-Werte dürfen sich um $+2$ bis -2 unterscheiden. Diese Festlegung ist abhängig von der Wahl der Gitterbreite h und kann somit im Allgemeinen variieren.

Wenn also \mathbf{u} und $\nabla \mathbf{p}$ noch nicht stationär geworden sind, kann die Gesamtkraft auch noch nicht Null sein, nachdem sich diese Aussage auf den stationären Fall bezieht. Insgesamt sind unsere Rechenergebnisse bezüglich der Impulserhaltung zufriedenstellend. Einzusehen sind diese im Anhang D.

Die ersten Tests führen wir mit unserem zu Grunde gelegten Einlassprofil, einer Parabel mit dem Maximum 1,5 und Reynolds-Zahl 1, durch. Für 3×3 -Szenarien verwenden wir die Zeitschrittweite $\Delta t = 0.01$ und für 4×4 -Szenarien ist $\Delta t = 0.005$. Zusätzlich überprüfen wir noch, ob es eine Verbesserung bei der Kraftberechnung gibt, wenn man das Einlassprofil in mehreren Schritten zum vollen Profil werden lässt. Dies gelingt jedoch nicht, da sich der Kanal nach 10 Zeitschritten so verhält, wie nach 0 Zeitschritten mit sofortigem Gesamt-Einlassprofil.

Die in Anhang D angegebenen Wertetabellen sind für die unterschiedlichen Ansatzfunktionen, Einlassprofile und verschiedene Zeitschritte angegeben.

6.5 Energieerhaltung

Die aufwendigste und interessanteste Aufgabe dieser Diplomarbeit ist die Überprüfung der Energieerhaltung, genauer gesagt der kinetischen Energie. Um diese zu testen, bedarf es einiger Rechnungen und Erklärungen.

Im Allgemeinen basieren die in diesem Abschnitt gezeigten Formeln auf dem Buch [Gresho 98]. Wir rechnen allerdings mit vereinfachten Formeln, da wir die Volumenkräfte und Kräfte auf dem Neumannrand außer Acht lassen. Diese Aufgabe ist deswegen von Interesse, da wir uns von den zwei verschiedenen Ansatzfunktionen der Finite-Element-Methode unterschiedliche Ergebnisse erhoffen. Erwartet wird eine Energieerhaltung durch die divergenzfreien Ansatzfunktionen, was von den bilinearen Elementen nicht zwingend erfüllt sein muss.

6.5.1 Herleitung der Formel

Die kontinuierliche Änderung der kinetischen Energie wurde bereits in Abschnitt 3.3 dargelegt. Hier noch einmal die zwei wichtigsten Formeln:

$$\frac{d}{dt}E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} dV \quad (6.2)$$

$$\frac{d}{dt}E = \rho \int_{\Omega} \left(-(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{p} + \frac{\mu}{\rho} (\Delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{u} dV. \quad (6.3)$$

Da die Ableitung der Energie nach der Zeit im Diskreten, wie bereits in Gleichung 5.15 dargestellt, mit $\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u})$ berechnet wird, können wir unter Verwendung der diskreten Variante von 6.3 folgende Gleichung aufstellen:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u}) = \mathbf{u}^T (-\mathbf{C}(\mathbf{u}) \mathbf{u} - \mathbf{D} \mathbf{u} + \mathbf{M}^T \mathbf{p}) \quad (6.4)$$

Um die Erhaltung der kinetischen Energie zu überprüfen, müssen wir noch die Kräfte, die am Dirichletrand wirken, in die Gleichung einbeziehen. Dies geschieht, indem wir diese als \mathbf{f} auf die rechte Seite der Impulsgleichung 4.9 schreiben:

$$\mathbf{A} \mathbf{u}_t + \mathbf{C}(\mathbf{u}) \mathbf{u} + \mathbf{D} \mathbf{u} - \mathbf{M}^T \mathbf{p} = \mathbf{f}. \quad (6.5)$$

In [Gresho 98] sind in \mathbf{f} zusätzlich zu den „Reaktionskräften“ am Dirichletrand die Kräfte am Neumannrand und die Volumenkräfte einbezogen. In unserem Fall finden diese zusätzlichen Kräfte keine Beachtung bei der Berechnung der Energieänderung.

Durch das \mathbf{f} ändert sich auch die nach der Zeit abgeleitete kinetische Energie. Da wir die Erhaltung dieser erreichen wollen, bleibt zu testen, ob

$$\mathbf{u}^T (\mathbf{C}(\mathbf{u}) \mathbf{u} + \mathbf{D} \mathbf{u} - \mathbf{M}^T \mathbf{p}) - \mathbf{u}^T \mathbf{f} = 0 \quad (6.6)$$

gilt.

Da nach Abschnitt 6.3 die Kontinuitätsgleichung erfüllt sein muss, also $\mathbf{M} \mathbf{u} = 0$ und somit auch $\mathbf{u}^T \mathbf{M}^T = (\mathbf{M} \mathbf{u})^T = 0$ ist, kann man den Druckterm $\mathbf{u}^T \mathbf{M}^T \mathbf{p}$ in der Energieableitung nach der Zeit weglassen. Dies wird auch im Programm getestet, indem man die einzelnen Bestandteile der Energieerhaltungsrechnung

separat betrachtet. Im stationären Fall ist der mit \mathbf{u} multiplizierte Druckgradient numerisch Null.

Hätten wir für die divergenzfreien Ansatzfunktionen tatsächlich eine antisymmetrische Konvektionsmatrix $\mathbf{C}(\mathbf{u})$, könnte man den Term $\mathbf{u}^T \mathbf{C}(\mathbf{u}) \mathbf{u}$ bei der Überprüfung der Energieerhaltung ebenfalls weglassen, da durch die Antisymmetrie

$$\mathbf{C}(\mathbf{u})^T = -\mathbf{C}(\mathbf{u}) \quad (6.7)$$

gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T \mathbf{C}(\mathbf{u}) \mathbf{u} &\stackrel{\text{skalärer Wert}}{=} (\mathbf{u}^T \mathbf{C}(\mathbf{u}) \mathbf{u})^T = \mathbf{u}^T \mathbf{C}(\mathbf{u})^T \mathbf{u} \\ &\stackrel{6.7}{=} \mathbf{u}^T (-\mathbf{C}(\mathbf{u})) \mathbf{u} = -\mathbf{u}^T \mathbf{C}(\mathbf{u}) \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Gleichheit kann in Rechnung 6.8 nur gelten, wenn $\mathbf{u}^T \mathbf{C}(\mathbf{u}) \mathbf{u} = 0$ ist.

Allerdings haben wir nur durch eine Abänderung von $\mathbf{C}(\mathbf{u})$ eine Antisymmetrie erreicht, jedoch nur für die Nischenströmung. Deshalb belassen wir den Konvektionsterm der Energieänderung in deren Berechnung.

Letzten Endes sieht die Gleichung für die Änderung der kinetischen Energie folgendermaßen aus:

$$\mathbf{u}^T (\mathbf{C}(\mathbf{u}) \mathbf{u} + \mathbf{D} \mathbf{u}) - \mathbf{u}^T \mathbf{f} = 0. \quad (6.9)$$

6.5.2 Formel für \mathbf{f}

Für den Test der Energieerhaltung besitzen wir durch den Lösungsalgorithmus für die Navier-Stokes Gleichungen alle nötigen Terme, mit Ausnahme von \mathbf{f} . In diesem Abschnitt soll die dafür nötige Formel aufgestellt werden, welche auch in [Gresho 98] wieder zu finden ist.

Bei der Berechnung von \mathbf{f} beschränken wir uns zuerst auf die Koordinatenrichtung x_1 ; denn für x_2 sieht die Berechnungsweise genauso aus. Es wird nun der N -dimensionale Vektor \mathbf{f}_{x_1} , wobei N der Anzahl der Gitterpunkte des gewählten Szenarios entspricht, berechnet.

In unserem dazugehörigen Verfahren haben wir, wie bereits erwähnt, festgelegt,

die Volumenkräfte und die entstehenden Kräfte am Neumannrand auszuklamern. Somit fließen ausschließlich die Reaktionskräfte $\tilde{\mathbf{F}}_{x_1}$ vom Dirichletrand in die Berechnung von \mathbf{f}_{x_1} ein. Hier ist die Formel für ein Element i des Vektors \mathbf{f}_{x_1} gegeben:

$$\mathbf{f}_{x_1,i} = \int_{\Gamma_D^{(x_1)}} \phi_i^{(x_1)} \tilde{\mathbf{F}}_{x_1} dS. \quad (6.10)$$

Dabei sei $\phi_i^{(x_1)}$ wieder die entsprechende Ansatzfunktion. Um diese Gleichung lösen zu können, müssen wir natürlich zuerst $\tilde{\mathbf{F}}_{x_1}$ berechnen. Nach [Gresho 98] sieht die Formel hierfür wie folgt aus:

$$\tilde{\mathbf{F}}_{x_1} = \sum_{j=1}^N \tilde{\mathbf{F}}_{x_1,j} \phi_j^{(x_1)} \quad (6.11)$$

Dabei entspricht $\tilde{\mathbf{F}}_{x_1,j}$ den Kraftkomponenten in x_1 -Richtung an den Gitterpunkten.

Wir setzen nun 6.11 in die Gleichung 6.10 ein, ziehen die Summe über die Kräfte aus dem Integral heraus und erhalten somit folgende Formel zur Berechnung von $\mathbf{f}_{x_1,i}$:

$$\mathbf{f}_{x_1,i} = \sum_{j=1}^3 \tilde{\mathbf{F}}_{x_1,j} \int_{\Gamma_D^{(x_1)}} \phi_i^{(x_1)} \phi_j^{(x_1)} dS. \quad (6.12)$$

Dass die Summe nur von 1 bis 3 geht, ist etwas Symbolisches. Es steht dafür, dass nur der Randknoten selbst und seine benachbarten Randknoten auf diese Berechnung Einfluss nehmen und sich somit maximal drei Anteile auf einen einzelnen Term von \mathbf{f}_{x_1} auswirken.

Zu den Berechnungen des Integrals und der Kraftwerte $\tilde{\mathbf{F}}_{x_1,i}$ kommen wir in den folgenden Abschnitten.

6.5.3 Herleitung der dazugehörigen Massenmatrix am Rand

In diesem Abschnitt wollen wir den Integralterm aus der Gleichung 6.12 behandeln. Dieser kann in Form einer Massenmatrix lokal direkt aufgestellt werden. Die Berechnung dieser Matrix soll hier geschehen.

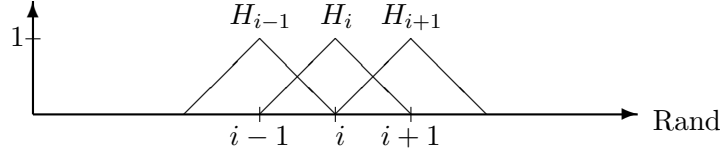


Abbildung 6.7: Hütchenfunktion: zweidimensionale Ansatzfunktion für die Berechnung der Massenmatrix am Rand Γ_D

In unserem Fall sieht die lokale Massenmatrix, die wir mit $\mathbf{A}_{\Gamma_D}^e$ bezeichnen wollen, für jede Zelle gleich aus. Mit ihr lässt sich leicht rechnen. Die Rechenzeit des Programmes erhöht sich somit nicht mehr als nötig.

Da das Integral letztendlich nur über die Kanten zwischen Dirichlet-Randknoten integriert, ist die Berechnung der einzelnen Werte der Matrix auch nicht besonders schwierig und aufwändig. An und für sich befinden wir uns im Eindimensionalen. Allerdings kann man das Integral als eine Flächenberechnung interpretieren. Man integriert über die sogenannte Hütchenfunktion, die in Abbildung 6.7 geometrisch dargestellt ist. Die H_i 's dieser Abbildung bezeichnen die einzelnen Hütchen. Dabei sieht man, dass bei den einzelnen Punkten genau das dazugehörige Hütchen, das einzeln ist, das nicht Null ist. Die Bezeichnung *Rand* ist auf unsere spezielle Betrachtungsweise in den Szenarien zurückzuführen. Es wird schließlich am Rand mit dieser Funktion gerechnet bzw. mit den Dirichletpunkten, die sich am Rand des speziellen Szenarios befinden.

Sodann ist, eine passende lokale Matrix für das Integral unserer Formel aufzustellen. Diese wird sich auf zwei Randpunkte beziehen, die gemeinsam eine Randkante bilden.

Um die Randrechnungen zu veranschaulichen, entnimmt man Abbildung 6.7 ein Randstück zwischen zwei Knotenpunkten, Wie in Abbildung 6.8 dargestellt. Da das Randstück einer Zellkante entspricht, hat dieses somit die Länge h .

Nun zur Berechnung der Einträge für die elementweise Massenmatrix $\mathbf{A}_{\Gamma_D}^e$, die das Integral in der Gleichung ersetzen wird. Die Gerade $a = \frac{x}{h}$ und die Gerade $b = 1 - \frac{x}{h}$ aus Abbildung 6.8 sind unsere $\phi_i^{(x)}$ des Integrals.

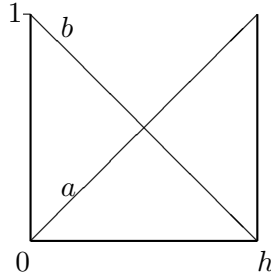


Abbildung 6.8: Ausschnitt der Hütchenfunktion für eine Randkante der Länge h .

Es folgt die Berechnung der einzelnen Teilintegrale für die zukünftigen Elemente der Massenmatrix $\mathbf{A}_{\Gamma_D}^e$:

$$\begin{aligned} \int_0^h \frac{x}{h} \cdot \frac{x}{h} dx &= \int_0^h \frac{x^2}{h^2} dx = \left[\frac{x^3}{3h^2} \right]_0^h = \frac{h}{3} \\ \int_0^h \left(1 - \frac{x}{h}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right) dx &= \int_0^h 1 - \frac{2x}{h} + \frac{x^2}{h^2} dx \\ &= \left[x - \frac{x^2}{h} + \frac{x^3}{3h^2} \right]_0^h = \frac{h}{3}. \end{aligned}$$

Die letzten beiden Ergebnisse entsprechen den Diagonalelementen der Matrix. Zur Berechnung der zwei anderen Matrixelemente, die auf Grund der Vertauschbarkeit der Teilelemente in der Berechnung identisch sind, gilt:

$$\int_0^h \frac{x}{h} \left(1 - \frac{x}{h}\right) dx = \int_0^h \frac{x}{h} - \frac{x^2}{h^2} dx = \left[\frac{x^2}{2h} - \frac{x^3}{3h^2} \right]_0^h = \frac{h}{6}.$$

Mit diesen Berechnungen erhalten wir für die Matrix $\mathbf{A}_{\Gamma_D}^e$ folgendes Ergebnis:

$$\mathbf{A}_{\Gamma_D}^e = \frac{h}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Auch wenn bei unseren Berechnungen die Randkanten der einzelnen Zellen integriert werden, wird in der Formel an sich der Wert für jeden Dirichlet-Randknoten berechnet. Eine weitere Veranschaulichung, welche Werte bei einem Punkt eingehen, wenn er ein Dirichlet-Randpunkt von zwei Randkanten ist, zeigt uns die Skizze in Abbildung 6.9.

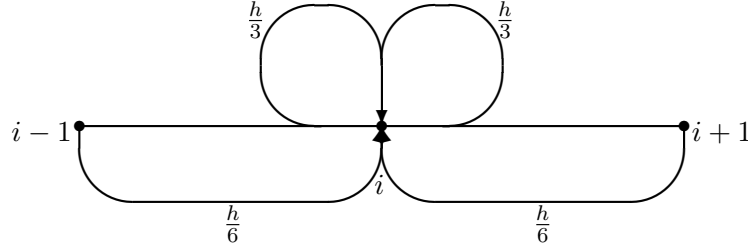


Abbildung 6.9: Integrationswerte für einen Dirichletknoten von zwei Randkanten

6.5.4 Invertieren der Massenmatrix

In diesem Abschnitt behandeln wir die Invertierung der Massenmatrix $\mathbf{A}_{\Gamma_D}^e$. Diese bzw. ihre globale Form ist für die Berechnung von $\tilde{\mathbf{F}}_{x_1}$ notwendig. Wir beschränken uns in Gleichung 6.5 auf das Element i und setzen auf der rechten Seite die Formel aus Gleichung 6.12 ein. Damit erhalten wir:

$$[\mathbf{A}\dot{\mathbf{u}} + [\mathbf{C}(\mathbf{u}) + \mathbf{D}]\mathbf{u} - \mathbf{M}^T \mathbf{p}]_{x_1,i} = \sum_{j=1}^3 \tilde{\mathbf{F}}_{x_1,j} \int_{\Gamma_D^{(x_1)}} \phi_i^{(x_1)} \phi_j^{(x_1)} dS. \quad (6.13)$$

Nachdem das Integral der lokalen Massenmatrix $\mathbf{A}_{\Gamma_D}^e$ entspricht, muss diese durch Invertieren auf die andere Seite gebracht werden, damit man $\tilde{\mathbf{F}}_{x_1,i}$ berechnen kann. Will man jedoch gleich den gesamten Vektor $\tilde{\mathbf{F}}_{x_1}$ berechnen, muss zuerst die Matrix $\mathbf{A}_{\Gamma_D}^e$ globalisiert werden. Vorerst werden ein paar Überlegungen zum Thema Masslumping angestellt.

Bei unserer Massenmatrix \mathbf{A} verwenden wir die gelumpete Version. Bei der Massenmatrix $\mathbf{A}_{\Gamma_D}^e$ muss noch überprüft werden, ob sich dies lohnt. Vorerst wird mit der wahren Matrix \mathbf{A}_{Γ_D} gerechnet. Im nächsten Kapitelabschnitt wird eine kleine Fehlertabelle erstellt, um die Fehleranfälligkeit für die Verwendung der gelumpten Matrix darzustellen. Wenn der Fehler nicht all zu groß ist, können wir dem Programm das Rechnen erleichtern, indem wir tatsächlich die gelumpete Matrix $\tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_D}$ verwenden.

Im lokalen Fall erhalten wir lediglich die Einheitsmatrix mit dem Faktor $\frac{h}{2}$ davor. Die global gelumpete Matrix entspricht einer Einheitsmatrix der Dimension N multipliziert mit der Höhe einer Zelle:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_D} = h \mathbf{I}_N, \quad (6.14)$$

denn die Summe der einzelnen Zeilen von \mathbf{A}_{Γ_D} bildet die Umkehrung des vor der Matrix stehenden Terms mit Ausnahme der Höhe h . Diese darf nicht vergessen werden. Die Versuchung, beim Aufstellen der Matrizen den Einfluss der Höhe der Zellen außer Acht zu lassen, ist allerdings groß.

6.5.5 Überprüfen der Resultate

Wir kommen zurück zu unserer ursprünglich gewollten Berechnung von $\tilde{\mathbf{F}}_{x_1}$. Dabei gehen wir zu dem gesamten $\tilde{\mathbf{F}}$ über, d.h. das $\tilde{\mathbf{F}}$ mit beiden Koordinatenrichtungen x_1 und x_2 . Dieses können wir berechnen, indem wir Gleichung 6.13 komplett und nicht elementweise aufstellen und die somit globale Massenmatrix \mathbf{A}_{Γ_D} durch Invertieren auf die andere Seite bringen:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{A}_{\Gamma_D}^{-1} [\mathbf{A}\dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{C}(\mathbf{u}) + \mathbf{D})\mathbf{u} - \mathbf{M}^T\mathbf{p}]. \quad (6.15)$$

Die globale Matrix \mathbf{A}_{Γ_D} ist in unseren Simulationsbeispielen immer singulär⁵. Deshalb ist es notwendig, zu überprüfen, ob diese im Programm anwendbar ist. Dazu berechnen wir $\tilde{\mathbf{F}}$ einmal mit der globalen Matrix \mathbf{A}_{Γ_D} und reduzieren das Ergebnis auf die Dirichletknotenelemente. Zur Veranschaulichung nehmen wir wieder die Abbildung 6.4 als Beispiel, wobei alle Ränder mit Dirichlet-Randbedingungen definiert sind. Wir stellen den Vektor $\tilde{\mathbf{F}}$, wie eben beschrieben, auf. Allerdings reicht es uns, dieses zur Veranschaulichung für die Koordinatenrichtung x_1 durchzuführen:

$$\tilde{\mathbf{F}}_1 = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 & f_7 & f_8 & f_9 \end{pmatrix}^T. \quad (6.16)$$

Reduziert nennen wir den Vektor nun $\tilde{\mathbf{F}}_{1,r_1}$. Dieser sieht wie folgt aus:

$$\tilde{\mathbf{F}}_{1,r_1} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_6 & f_7 & f_8 & f_9 \end{pmatrix}^T. \quad (6.17)$$

Ein anderes Mal berechnen wir $\tilde{\mathbf{F}}$, indem wir die für die Rechnung benötigten Terme im Voraus auf die Dirichletknotenelemente kürzen (auch die globale Massenmatrix) und somit eine nicht mehr singuläre Matrix \mathbf{A}_{Γ_D} haben. Wir erhalten sofort den Vektor:

$$\tilde{\mathbf{F}}_{1,r_2} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 & \tilde{f}_2 & \tilde{f}_3 & \tilde{f}_4 & \tilde{f}_6 & \tilde{f}_7 & \tilde{f}_8 & \tilde{f}_9 \end{pmatrix}^T. \quad (6.18)$$

⁵Eine quadratische Matrix \mathbf{B} ist singulär, wenn nicht alle Zeilen linear unabhängig voneinander sind.

	$ \mathbf{f} - (\mathbf{F} _{\Gamma_D} - \mathbf{M}^T \mathbf{p} _{\Gamma_D}) _2 = 0$			
	Freier Kanal		Nischenströmung	
Gittergröße	divergenzfrei	bilinear	divergenzfrei	bilinear
$3x3$	✓	✓	✓	✓
$4x4$	✓	✓	✓	✓
$8x8$	✓	✓	✓	✓

Tabelle 6.4: Testergebnisse zur Überprüfung unserer These aus Gleichung 6.20.

Nach mehreren Versuchsergebnissen der Berechnung $||\tilde{\mathbf{F}}_{r_1} - \tilde{\mathbf{F}}_{r_2}||_2$, die immer Null liefern, sind wir zu der Schlussfolgerung gekommen, dass die beiden Vektoren übereinstimmen.

Da wir von einem stationären Zustand ausgehen, fällt der nach der Zeit abgeleitete Term in Gleichung 6.15 weg. Die Konvektions- und Diffusionsterme lassen sich, wie bereits vorher geschehen, zu \mathbf{F} zusammenfassen. Die Berechnungen beziehen sich weiterhin nur auf den Rand. Es resultiert daraus folgende Gleichung:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{A}_{\Gamma_D}^{-1} (\mathbf{F}|_{\Gamma_D} - \mathbf{M}^T \mathbf{p}|_{\Gamma_D}). \quad (6.19)$$

Im Fall der wahren globalen Matrix \mathbf{A}_{Γ_D} wurde inzwischen folgende, von uns aufgestellte These überprüft:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{A}_{\Gamma_D}^e \\ &\stackrel{6.19}{=} \mathbf{A}_{\Gamma_D}^{-1} (\mathbf{F}|_{\Gamma_D} - \mathbf{M}^T \mathbf{p}|_{\Gamma_D}) \mathbf{A}_{\Gamma_D}^e \\ &= \mathbf{F}|_{\Gamma_D} - \mathbf{M}^T \mathbf{p}|_{\Gamma_D}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Nach mehreren Tests von

$$||\mathbf{f} - (\mathbf{F}|_{\Gamma_D} - \mathbf{M}^T \mathbf{p}|_{\Gamma_D}) ||_2,$$

die numerisch für die verschiedensten Nischenströmungsszenarien und freien Kanäle Null ergeben haben, kann die These von uns bestätigt werden. Dies ist in Tabelle 6.4 zu sehen. Schließlich sollten sich die invertierte Matrix $\mathbf{A}_{\Gamma_D}^{-1}$ aus der Berechnung von $\tilde{\mathbf{F}}$ und die elementweise Matrix $\mathbf{A}_{\Gamma_D}^e$ eliminieren. Dies

Höhe h	$ \mathbf{A}_{\Gamma_D} - \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_D} _2$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

Tabelle 6.5: Massenmatrix \mathbf{A}_{Γ_D} und ihre gelumppte Version $\tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_D}$ im Vergleich

ist der Fall und erleichtert somit die Rechnungen im Programm. Jetzt müssen noch die Elemente von Vektoren, die keine Dirichletknotenelemente sind, Null gesetzt werden, wie dies bei $\mathbf{F}|_{\Gamma_D} + \mathbf{M}^T \mathbf{p}|_{\Gamma_D}$ notwendig ist. Man erspart sich somit das Aufrufen des externen Programms zur Berechnung von \mathbf{f} .

Nun überprüfen wir noch die Genauigkeit der gelumpten Matrix $\tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_D}$. Dazu vergleichen wir diese mit der globalen Matrix \mathbf{A}_{Γ_D} zu unterschiedlichen Zeitschritten mit der euklidischen Norm. In Tabelle 6.5 sind die Ergebnisse für 4x4-Szenarien zu finden. Je kleiner die Höhe einer Zelle ist, desto geringer ist somit der Fehler, der durch Verwenden der gelumpten Massenmatrix entsteht. Genauer gesagt, ist somit der Fehler gleich der Gitterbreite h .

Das Ziel dieses Abschnittes ist die Überprüfung der Ergebnisse für die Energieerhaltung, die durch die zwei Ansatzfunktionen entstehen. Dazu zeigen wir zum Abschluss einige Datentabellen, die jeweils die einzelnen Terme der Energieableitung eines Szenarios für beide Ansatzfunktionen auflisten. Dabei beziehen sich die Terme $\mathbf{u}^T \mathbf{F}_C$, $\mathbf{u}^T \mathbf{F}_D$ und $\mathbf{u}^T \nabla \mathbf{p}$ auf die Energieanteile des gesamten Gebietes Ω und die Terme $\mathbf{u}^T \mathbf{f}_C$, $\mathbf{u}^T \mathbf{f}_D$ und $\mathbf{u}^T \mathbf{f}_{\nabla \mathbf{p}}$ auf die Energieanteile am Rand Γ_D . Weiterhin sieht man in den Graphiken das Verhalten über die gesamten Zeitschritte der einzelnen Terme, die zur Berechnung der Energieänderung beitragen. Vergleicht man die Ergebnisse unter Verwendung der verschiedenen Ansatzfunktionen, ist kein gravierender Unterschied zu erkennen.

Wie gewünscht, haben wir bei den divergenzfreien Ansatzfunktionen die Erhaltung der kinetischen Energie erreicht. Allerdings haben wir damit gerechnet, dass dies mit den bilinearen Ansatzfunktionen nicht erfüllt wird. Dies hat sich jedoch nicht bestätigt. Selbst der Kanal mit Zylinder, der als Härtetest simuliert wird, liefert bei beiden Ansätzen ein ähnliches Ergebnis.

KAPITEL 6. NUMERISCHE DURCHFÜHRUNG UND TEST AUF KONSISTENZ

Bei den divergenzfreien Ansatzfunktionen ist die Änderung der Energie auf den einzelnen Zellen bereits Null. Bei den bilinearen Interpolationsfunktionen ist dies nur im gesamt betrachteten Szenario der Fall. Dies ist der einzige erkennbare Unterschied, der jedoch bis jetzt keine Verbesserung des Ergebnisses zur Folge hat.

	TS=10000, Re=200	
	4x4 DC, konstante Geschwindigkeit am Eingang	
Messgröße	divergenzfrei	bilinear
$\mathbf{u}^T \mathbf{F}_C$	$-2.0708e - 17$	$-2.6864e - 16$
$\mathbf{u}^T \mathbf{F}_D$	$1.880618508329841e - 02$	$1.885808429257889e - 02$
$\mathbf{u}^T \nabla \mathbf{p}$	0	$-2.1684e - 19$
$\mathbf{u}^T \mathbf{f}_C$	$-2.1576e - 17$	$-1.0192e - 17$
$\mathbf{u}^T \mathbf{f}_D$	$1.880618508329899e - 02$	$1.885808429267948e - 02$
$\mathbf{u}^T \mathbf{f}_{\nabla \mathbf{p}}$	0	0
Energieänderung	$-5.794e - 16$	$-1.0084e - 13$

Hierbei befindet sich die Stationarität im Fall der divergenzfreien Ansatzfunktionen im Potenzbereich -14(Druck) und -16(Geschwindigkeit) und im Fall der bilinearen Ansatzfunktionen im Potenzbereich -13(Druck) und -14 (Geschwindigkeit)

Tabelle 6.6: Einzelne Energievariablen für den Zeitschritt 10000 und Reynoldszahl 200 für das Nischenströmungsszenario (DC) mit konstanter Geschwindigkeit am Eingang für beide Ansatzfunktionen.

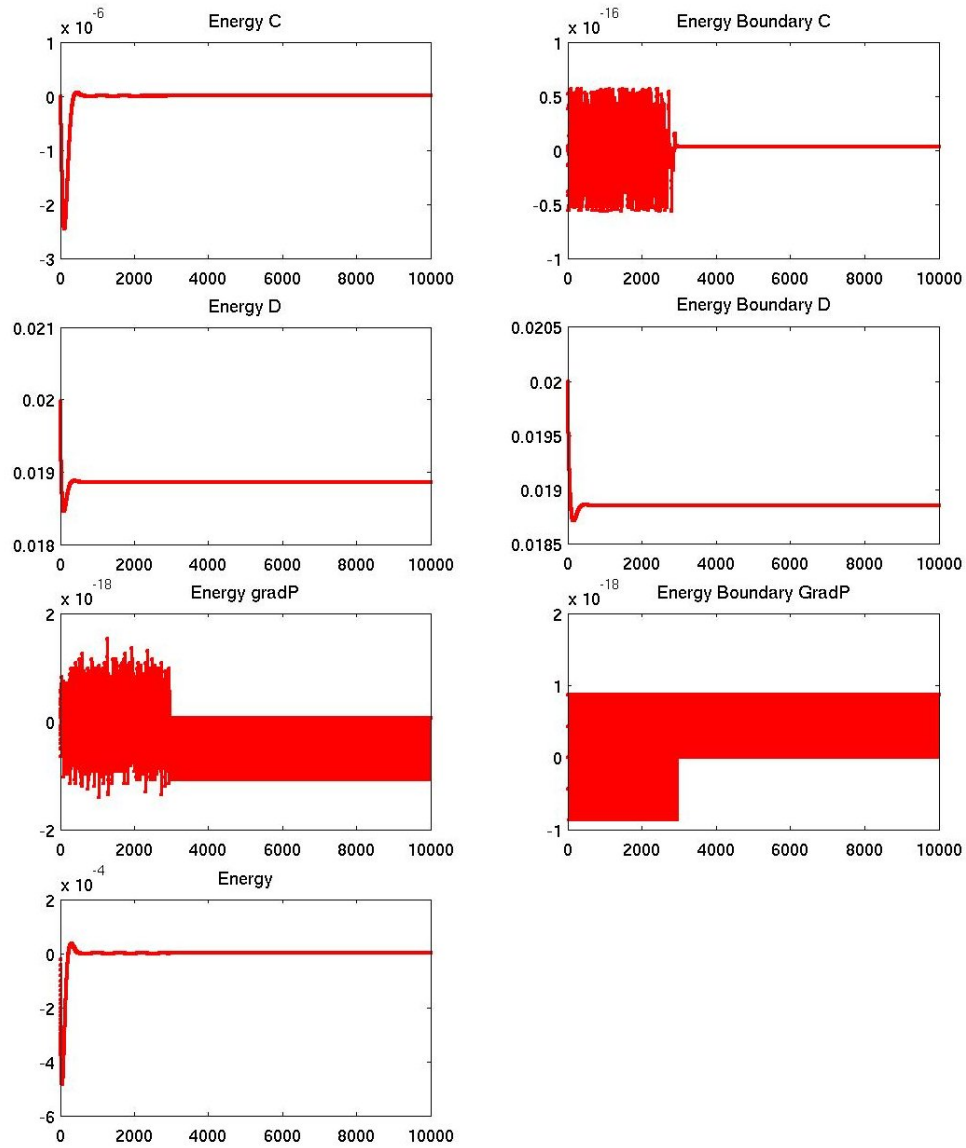


Abbildung 6.10: Energie und ihre einzelnen Anteile für ein 4x4 Nischenströmungsszenario mit konstanter Eingangsgeschwindigkeit $Re=200$ und $TS=10000$ mit bilinearen Ansatzfunktionen

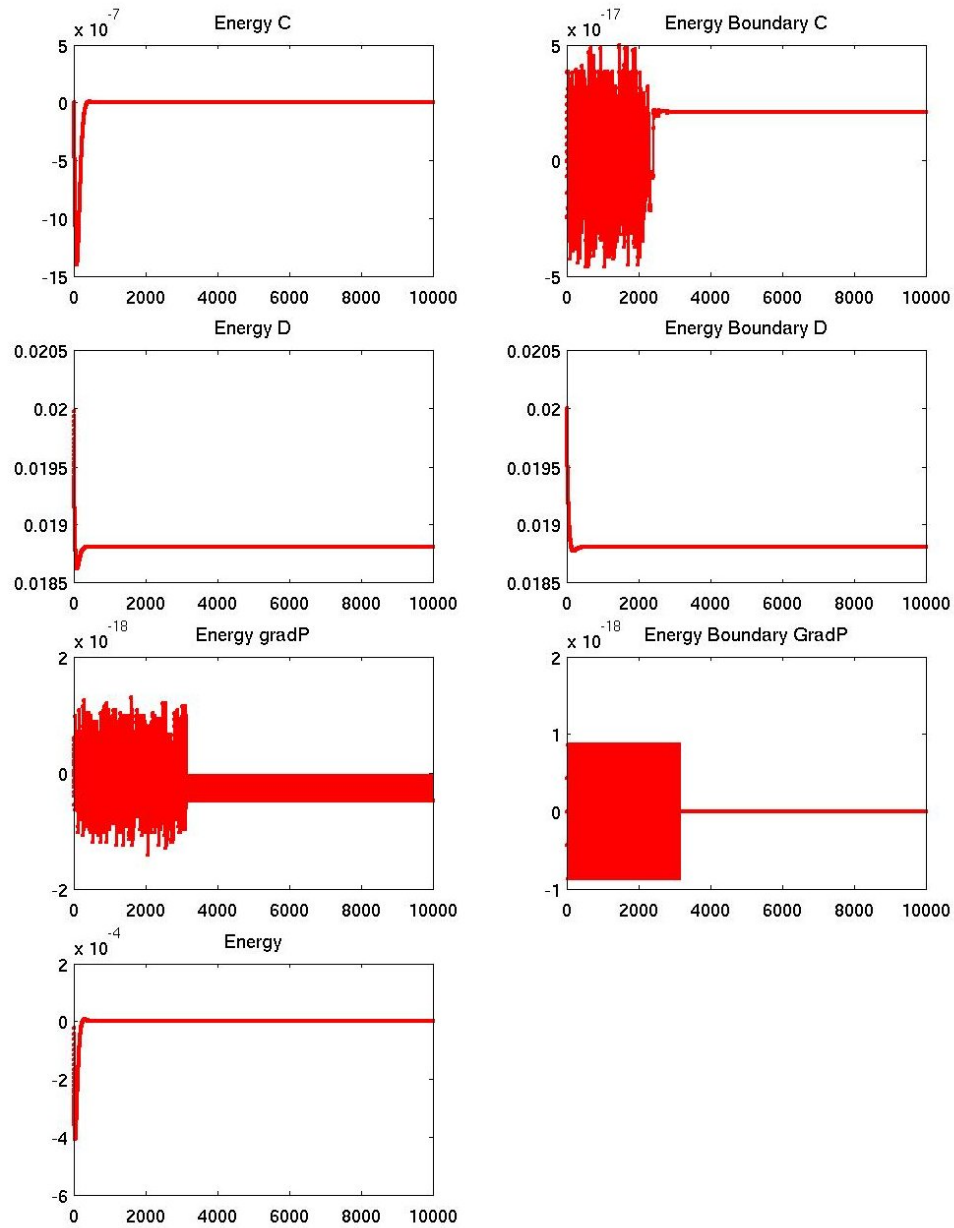


Abbildung 6.11: Energie und ihre einzelnen Anteile für ein 4x4 Nischenströmungsszenario mit konstanter Eingangsgeschwindigkeit $Re=200$ und $TS=10000$ mit divergenzfreien Ansatzfunktionen

	TS=10000, Re=200	
	4x4DC, keine konstante Geschwindigkeit am Eingang	
Messgröße	divergenzfrei	bilinear
$\mathbf{u}^T \mathbf{F}_C$	$-8.0517e - 15$	$1.563371571358515e - 03$
$\mathbf{u}^T \mathbf{F}_D$	$3.459229882522369e - 02$	$1.846330501217078e - 02$
$\mathbf{u}^T \nabla \mathbf{p}$	0	$-2.6021e - 18$
$\mathbf{u}^T \mathbf{f}_C$	$1.314447984156355e - 02$	$4.895759909493633e - 03$
$\mathbf{u}^T \mathbf{f}_D$	$1.044548053084774e - 02$	$9.513156724187065e - 03$
$\mathbf{u}^T \mathbf{f}_{\nabla \mathbf{p}}$	$1.100233845847334e - 02$	$5.617760040492571e - 03$
Energieänderung	$-5.669e - 12$	$-5.669e - 12$

Hierbei befindet sich die Stationarität im Fall der divergenzfreen Ansatzfunktionen im Potenzbereich -12(Druck) und -13(Geschwindigkeit) und im Fall der bilinearen Ansatzfunktionen im Potenzbereich -11

Tabelle 6.7: Einzelne Energievariablen für den Zeitschritt 10000 und Reynoldszahl 200 für das Nischenströmungsszenario (DC) ohne konstanter Geschwindigkeit am Eingang für beide Ansatzfunktionen.

	TS=5000, Re=200	
	4x4FC	
Messgröße	divergenzfrei	bilinear
$\mathbf{u}^T \mathbf{F}_C$	$-1.1735e - 15$	$-1.001380488936118e - 11$
$\mathbf{u}^T \mathbf{F}_D$	$5.6250e - 02$	$5.6250e - 02$
$\mathbf{u}^T \nabla \mathbf{p}$	$-2.6021e - 18$	$6.0715e - 18$
$\mathbf{u}^T \mathbf{f}_C$	$2.4927e - 16$	$1.837727886533358e - 12$
$\mathbf{u}^T \mathbf{f}_D$	$7.03124999999992e - 03$	$7.031249999972858e - 03$
$\mathbf{u}^T \mathbf{f}_{\nabla \mathbf{p}}$	$4.921874999999941e - 02$	$4.921874998977108e - 02$
Energieänderung	$-8.1879e - 16$	$-1.5955e - 12$

Hierbei befindet sich die Stationarität im Fall der divergenzfreen Ansatzfunktionen im Potenzbereich -13(Druck) und -16(Geschwindigkeit) und im Fall der bilinearen Ansatzfunktionen im Potenzbereich -12(Druck) und -13 (Geschwindigkeit)

Tabelle 6.8: Einzelne Energievariablen für den Zeitschritt 5000 und Reynoldszahl 200 für den freien Kanal (FC) mit parabolischer Geschwindigkeit am Eingang für beide Ansatzfunktionen.

KAPITEL 6. NUMERISCHE DURCHFÜHRUNG UND TEST AUF KONSISTENZ

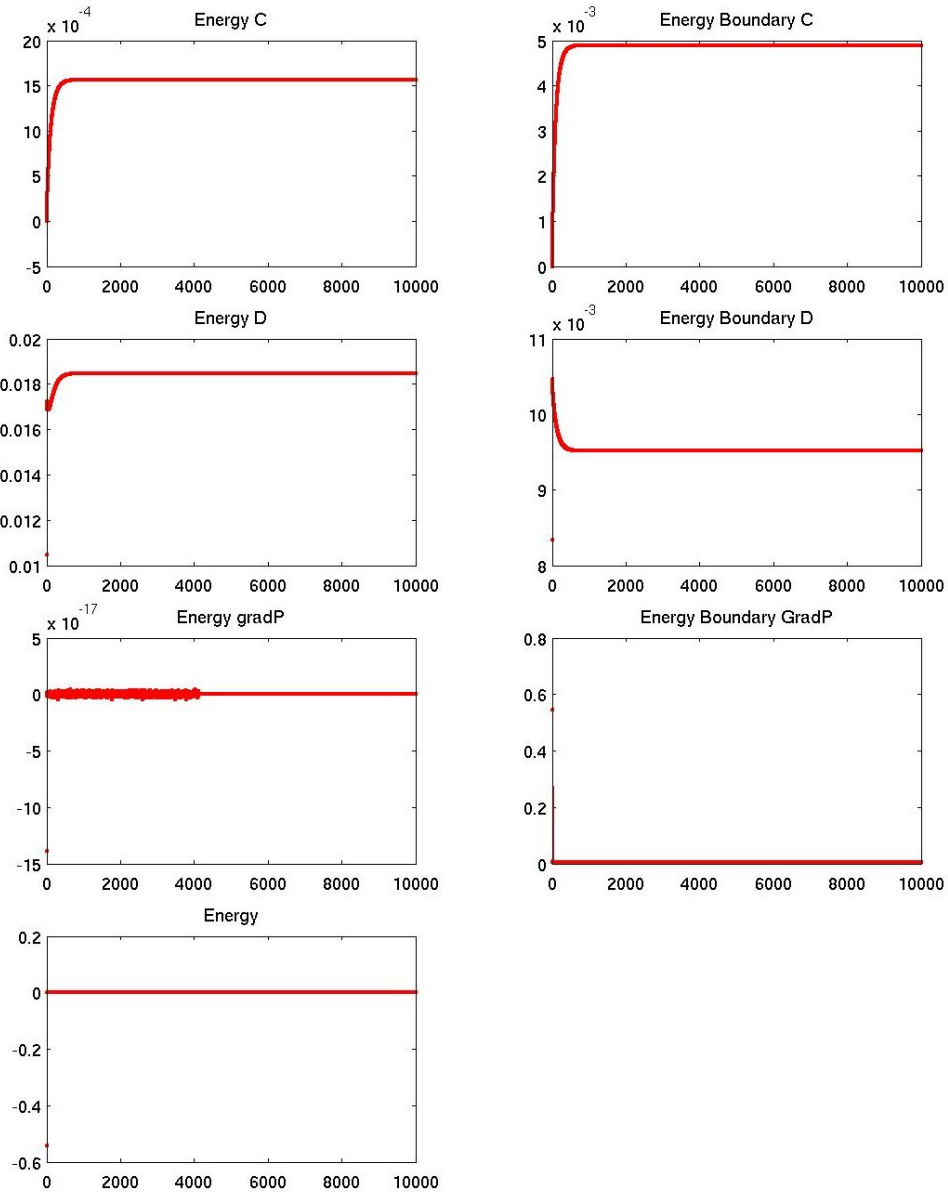


Abbildung 6.12: Energie und ihre einzelnen Anteile für ein 4x4 Nischenströmungsszenario mit nicht-konstanter Eingangsgeschwindigkeit mit $Re=200$ und $TS=10000$ mit bilinearen Ansatzfunktionen

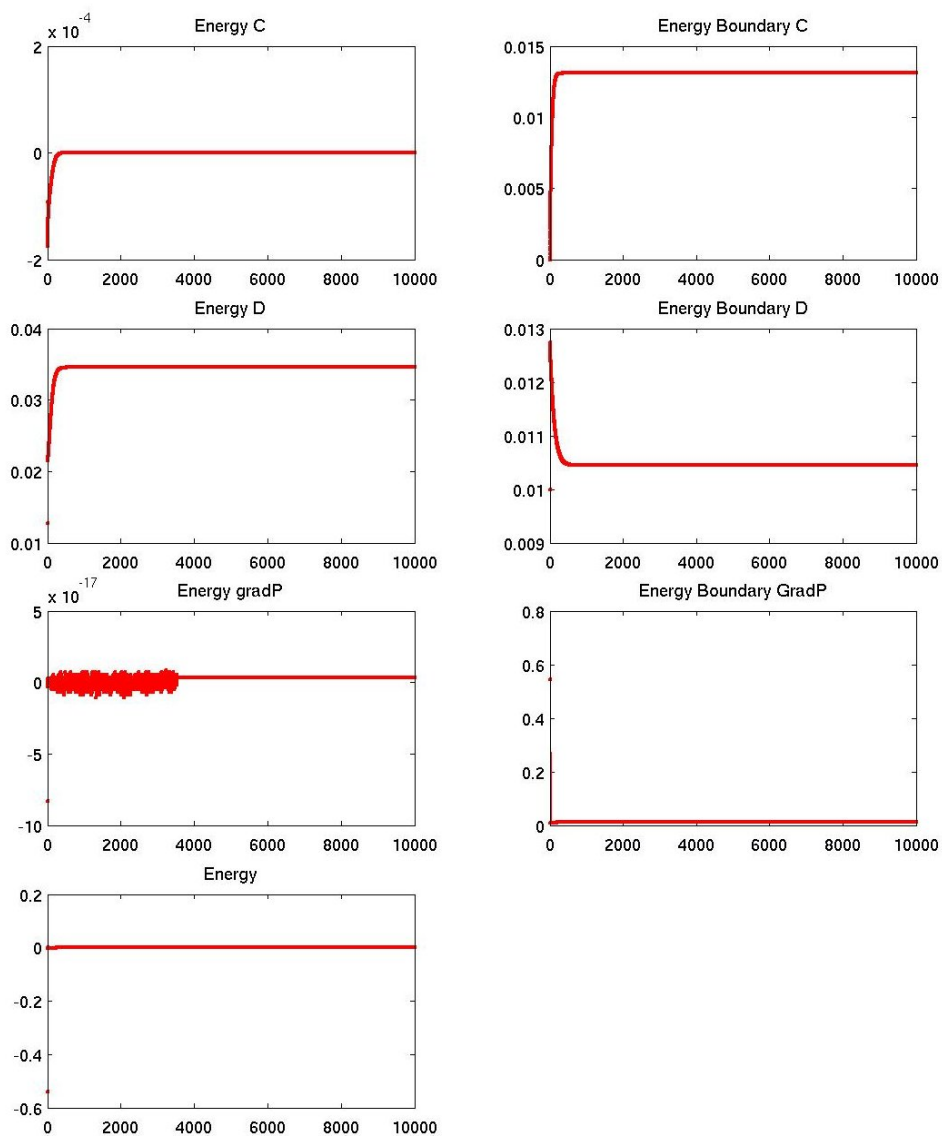


Abbildung 6.13: Energie und ihre einzelnen Anteile für ein 4x4 Nischenströmungsszenario mit nicht-konstanter Eingangsgeschwindigkeit mit $Re=200$ und $TS=10000$ mit divergenzfreen Ansatzfunktionen

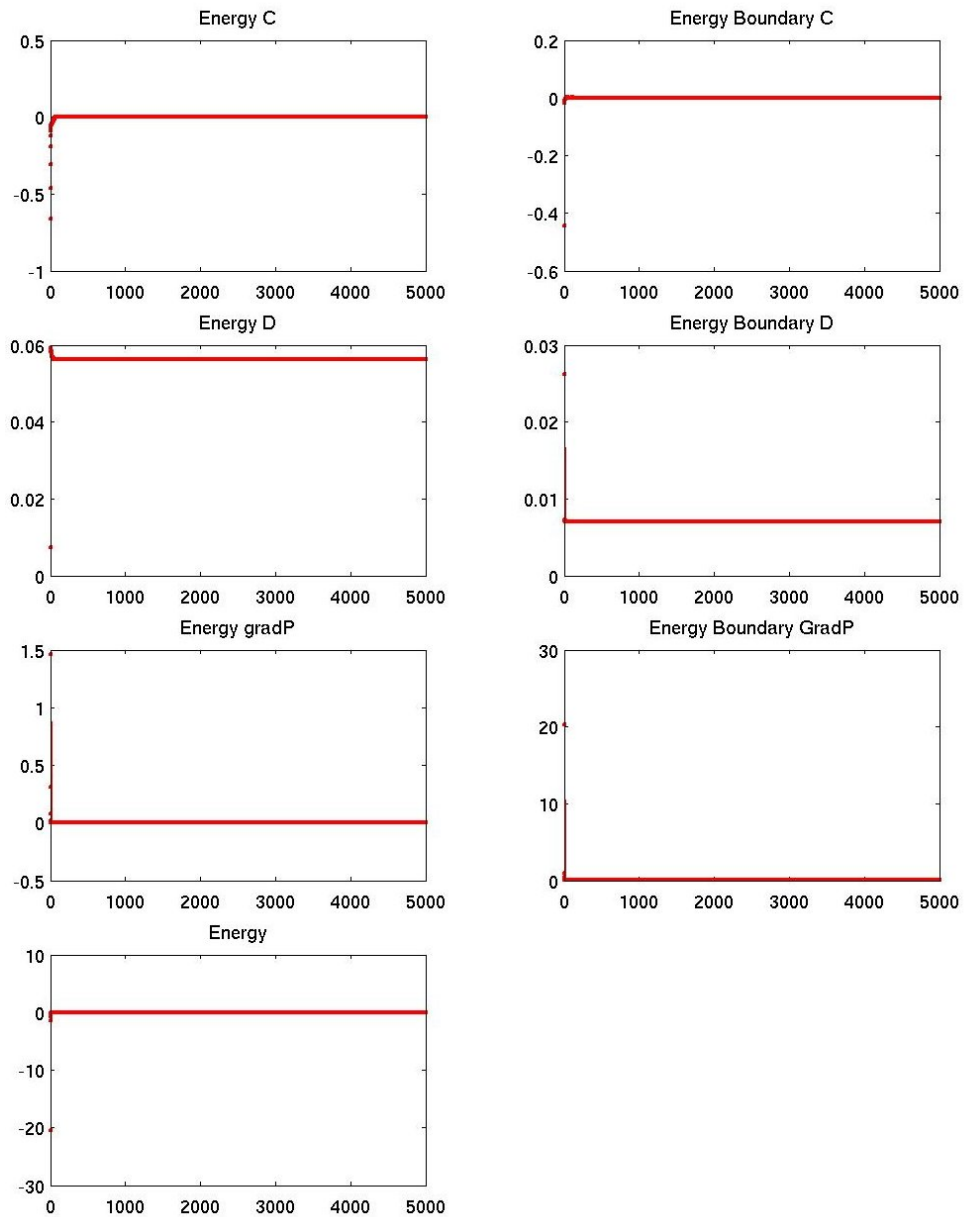


Abbildung 6.14: Energie und ihre einzelnen Anteile für einen 4x4 freien Kanal mit $Re=200$ und $TS=5000$ mit bilinearen Ansatzfunktionen

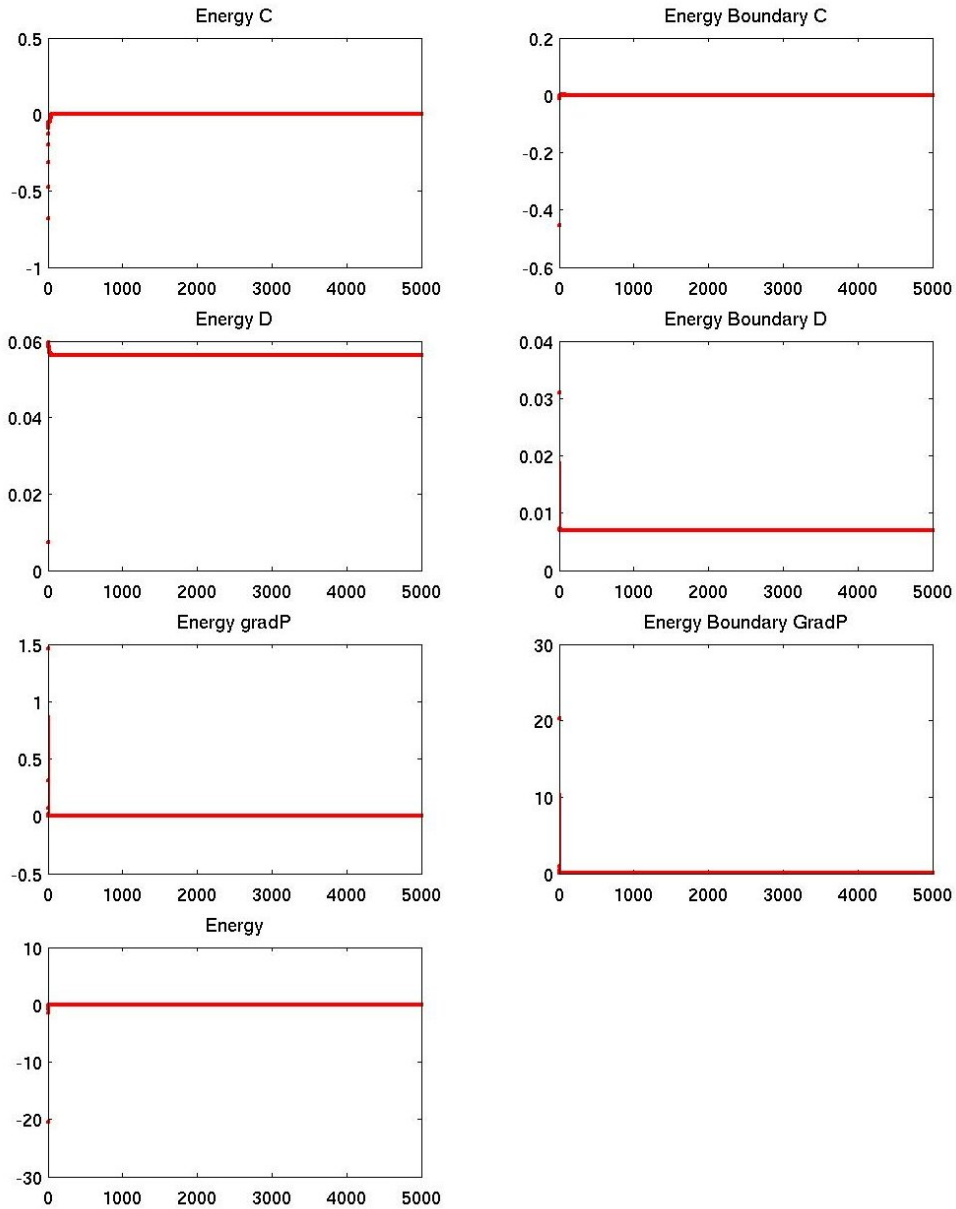


Abbildung 6.15: Energie und ihre einzelnen Anteile für einen 4x4 freien Kanal mit $Re=200$ und $TS=5000$ mit divergenzfreien Ansatzfunktionen

KAPITEL 6. NUMERISCHE DURCHFÜHRUNG UND TEST AUF KONSISTENZ

	TS=500, Re=20	
	220x41 Zylinder im Kanal	
Messgröße	divergenzfrei	bilinear
$\mathbf{u}^T \mathbf{F}_C$	$-1.641862592736609e - 05$	$-2.340520640187022e - 05$
$\mathbf{u}^T \mathbf{F}_D$	$5.876050723892489e - 03$	$5.828909747995229e - 03$
$\mathbf{u}^T \nabla \mathbf{p}$	$-7.100988781671997e - 12$	$-6.858244290230841e - 12$
$\mathbf{u}^T \mathbf{f}_C$	$-1.487223610228486e - 06$	$-2.310319248451517e - 06$
$\mathbf{u}^T \mathbf{f}_D$	$6.724605391443787e - 06$	$6.701545330079900e - 06$
$\mathbf{u}^T \mathbf{f}_{\nabla \mathbf{p}}$	$5.852921445701446e - 03$	$5.799659396018032e - 03$
Energieänderung	$1.473270482461181e - 06$	$1.453919493698413e - 06$

Hierbei befindet sich die Stationarität im Fall der divergenzfreien Ansatzfunktionen im Potenzbereich -6(Druck und Geschwindigkeit) und im Fall der bilinearen Ansatzfunktionen ebenso

Tabelle 6.9: Einzelne Energievariablen für den Zeitschritt 500 und Reynoldszahl 20 für den Kanal mit Zylinder mit parabolischer Geschwindigkeit am Eingang für beide Ansatzfunktionen.

	TS=2000, Re=20	
	220x41 Zylinder im Kanal	
Messgröße	divergenzfrei	bilinear
$\mathbf{u}^T \mathbf{F}_C$	$-1.901075986152014e - 05$	$-2.597077785184331e - 05$
$\mathbf{u}^T \mathbf{F}_D$	$5.876139636555375e - 03$	$5.828996458353066e - 03$
$\mathbf{u}^T \nabla \mathbf{p}$	$9.5689e - 18$	$1.2336e - 17$
$\mathbf{u}^T \mathbf{f}_C$	$-1.487223537535909e - 06$	$-2.310319124352792e - 06$
$\mathbf{u}^T \mathbf{f}_D$	$6.724605352766509e - 06$	$6.701545288550494e - 06$
$\mathbf{u}^T \mathbf{f}_{\nabla \mathbf{p}}$	$5.851891494878690e - 03$	$5.798634454337076e - 03$
Energieänderung	$-6.505213034913027e - 17$	$-5.117434254131581e - 17$

Hierbei befindet sich die Stationarität im Fall der divergenzfreien Ansatzfunktionen im Potenzbereich -14(Druck und Geschwindigkeit) und im Fall der bilinearen Ansatzfunktionen ebenfalls

Tabelle 6.10: Einzelne Energievariablen für den Zeitschritt 2000 und Reynoldszahl 20 für den Kanal mit Zylinder mit parabolischer Geschwindigkeit am Eingang für beide Ansatzfunktionen.

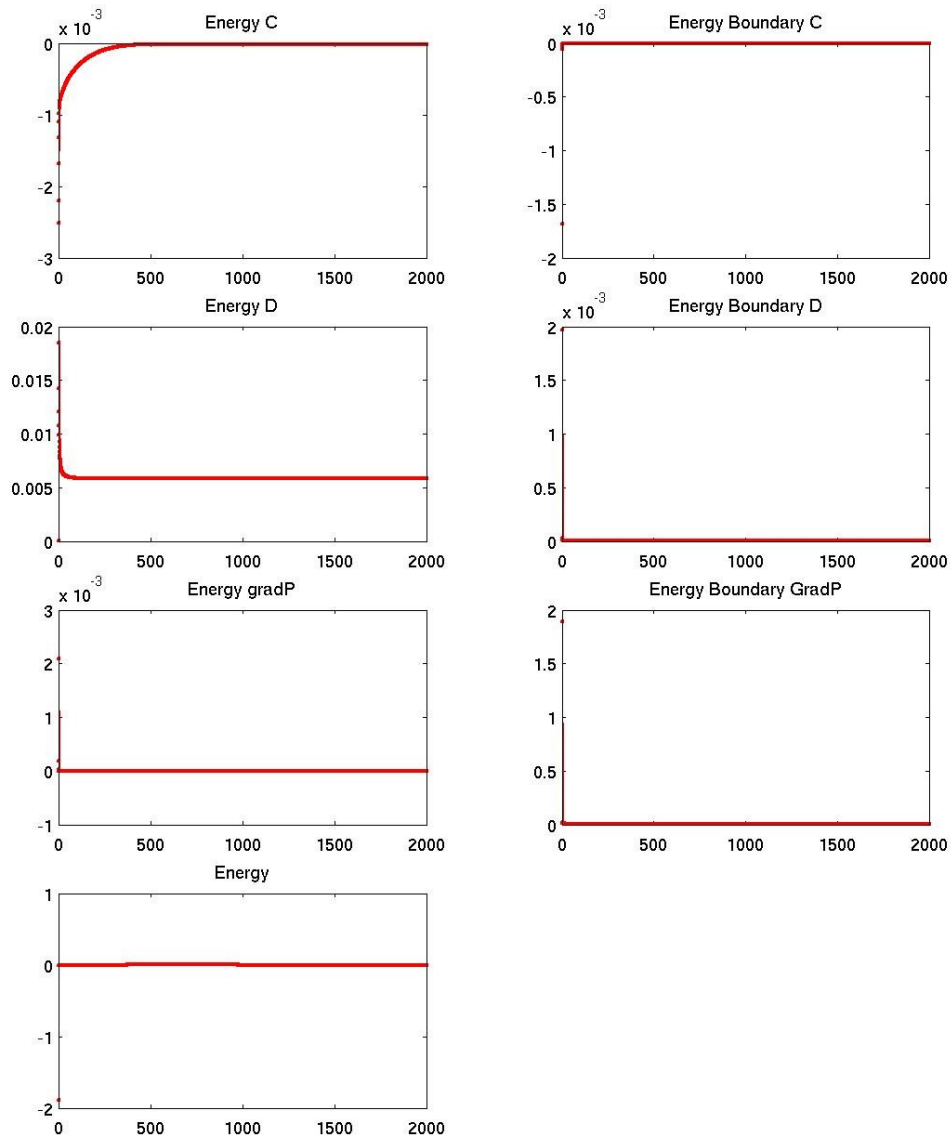


Abbildung 6.16: Energie und ihre einzelnen Anteile für ein 4x4 Kanal mit Zylinder mit $Re=20$ und $TS=2000$ mit bilinearen Ansatzfunktionen

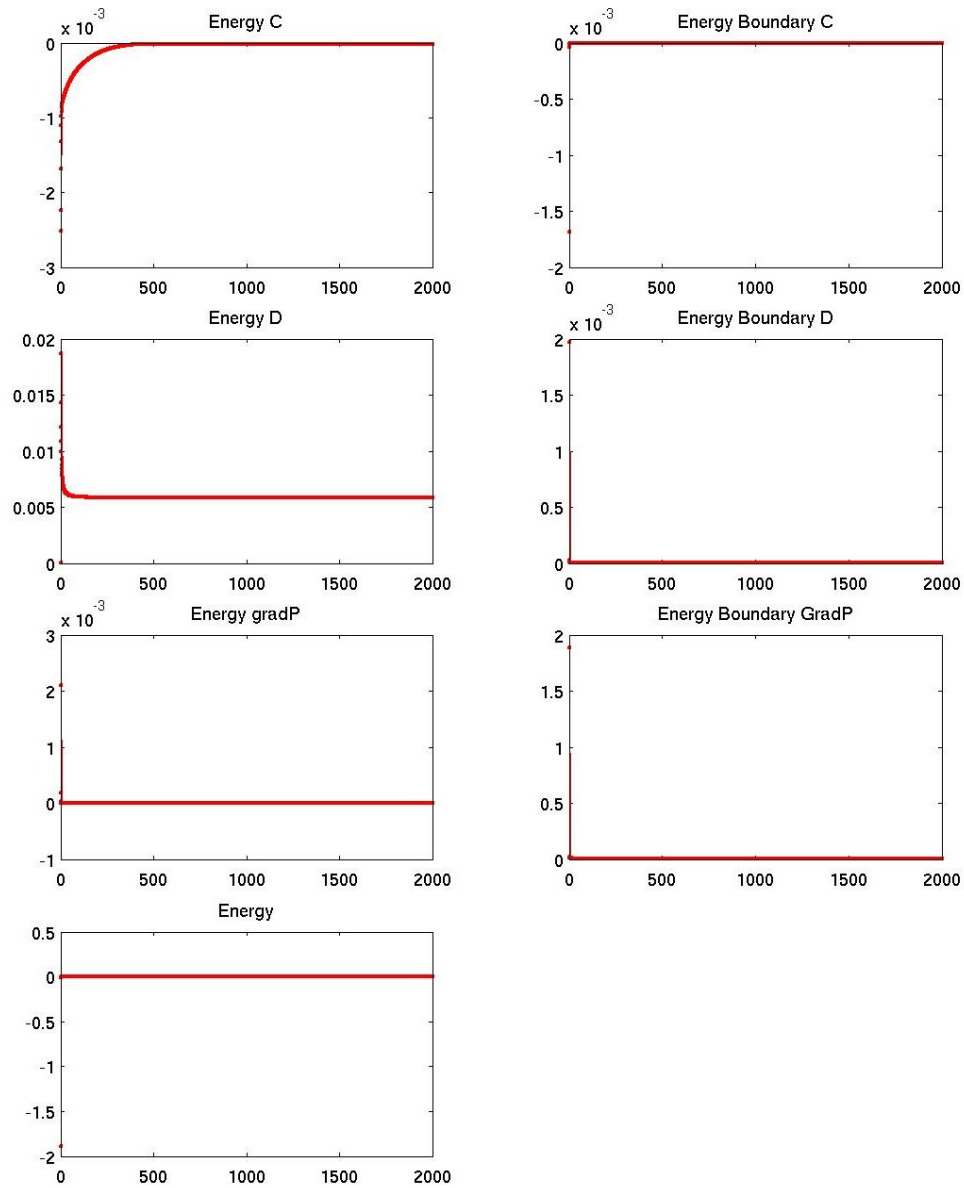


Abbildung 6.17: Energie und ihre einzelnen Anteile für ein 4x4 Kanal mit Zylinder mit $Re=20$ und $TS=2000$ mit divergenzfreen Ansatzfunktionen

Kapitel 7

Bewertung des Erreichten

Zum Abschluss dieser Arbeit fassen wir nochmals die Ergebnisse zusammen und zeigen Ideen für weitere Forschungsprojekte auf.

7.1 Zusammenfassende Einordnung der Ergebnisse

Der von uns verwendete Algorithmus zur Lösung der Navier-Stokes Gleichungen führte alle nötigen Berechnungen mit den lokalen Matrizen der Navier-Stokes Gleichungen durch. In dieser Arbeit wurden die Berechnungen mit den globalen Varianten der diskreten Terme durchgeführt, um im Anschluss daran die Ergebnisse mit jenen auf lokaler Basis zu vergleichen. Wie erwartet, zeigten sich übereinstimmende Resultate.

Weiter wurden die geforderten Matrixeigenschaften für die divergenzfreien Ansatzfunktionen überprüft. Das Ergebnis war, dass die Diffusionsmatrix \mathbf{D} die gewünschte Symmetrie erfüllt, die Matrix $\mathbf{C}(\mathbf{u})$ ihre Antisymmetrie aber nicht. Dies hat seine Ursache darin, dass die Randpunkte Werte ergeben, die sich bei der Prüfung der Antisymmetrie nicht wegheben. Konzentriert man sich auf das innere Verhalten eines Szenarios, kann man durch Nullsetzen der voneinander abhängigen Dirichlet-Randknoten im Nischenströmungsszenario die Antisymmetrie erreichen. Im freien Kanal bleiben mit dieser Technik noch Werte von den Knoten am Ausfluss übrig.

Im Anschluss an diese Auswertungen wurde die Erfüllung der wichtigen physikalischen Erhaltungssätze betrachtet.

Die Massenerhaltung erfüllte sich mit beiden Ansätzen. Dies war zu erwarten, da die Kontinuitätsgleichung der Navier-Stokes Gleichungen die Massenerhaltung zur Simulation voraussetzt.

Bei der Impulserhaltung haben wir mit beiden Ansatzfunktionen im stationären Fall eines Szenarios ebenfalls deren Erfüllung vermutet. Nach einer gewissen Anzahl von Zeitschritten konnte keine Änderung der Kraft mehr festgestellt werden. Dies ist in den Tabellen im Anhang D zu sehen.

Als letztes betrachteten wir die kinetische Energie. Dabei erkannten wir, dass der, vom Druck abhängige, innere Energieterm bei der Berechnung weggelassen werden kann, da dieser Null ist. Dies ist den Graphiken aus Kapitel 6 zu entnehmen. Wäre nun bei den divergenzfreien Ansatzfunktionen $\mathbf{C}(\mathbf{u})$ tatsächlich antisymmetrisch, würde der dazugehörige innere Energieterm ebenfalls Null sein. Da wir aber nicht mit dieser abgewandelten Form von $\mathbf{C}(\mathbf{u})$ gearbeitet haben, wurde dieser Term in unseren Berechnungen und Graphiken mit einbezogen. Für die Berechnung der Energiewerte am Rand haben wir Formeln aus [Gresho 98] kombiniert und dabei Volumenkräfte außer Acht gelassen. Hier stellten wir fest, dass diese Energiewerte leicht mit unserem Programm zu berechnen waren. Diese Energie bestand lediglich aus den Randwerten, die sich durch $\mathbf{F} - \mathbf{M}^T \mathbf{p}$ ergaben, was die Rechenzeit erheblich kürzer hielt, als unter Verwendung der zusätzlichen Matrixberechnungen. Das Ergebnis für die kinetische Energie war für die zu testenden divergenzfreien Ansatzfunktionen, wie gewünscht, Null im stationären Fall. Das gleiche Resultat erhielten wir auch für die bilinearen Ansatzfunktionen.

Alle gewünschten Ergebnisse für die divergenzfreien Ansatzfunktionen wurden erreicht. Allerdings ist im Vergleich zu den bilinearen Ansatzfunktionen bislang keine signifikante Verbesserung zu erkennen. Dies könnte aus den betrachteten stationären Ergebnissen erklärbar sein, insbesondere da Druckeffekte durch Ungenauigkeit bei der Druckberechnung mit der Verwendung der Cholesky-Zerlegung vermieden wurden. Da unterschiedlich große Szenarien betrachtet wurden, liegt dieses Ergebnis auch nicht an der Wahl der Gitterweite h . Es ist

zu vermuten, dass es im stationären Fall so ist, dass die bilinearen Ansatzfunktionen ebenfalls die kinetische Energie nicht mehr ändern.

7.2 Ausblick

Um zu einem erwünschten Unterschied zwischen bilinearen und divergenzfreien Ansatzfunktionen zu kommen, wäre als nächster Schritt denkbar, signifikantere Strömungsszenarien unter Anwendung der verschiedenen Ansatzfunktionen gegenüberzustellen und die beiden Lösungsverfahren mit ihrer Zeitabhängigkeit zu vergleichen, also nicht erst im stationären Fall.

Auf dieser Grundlage könnte beispielsweise in folgende Richtungen weiter geforscht werden:

- Die Simulationen finden in einfachen Szenarien mit quadratischem Gitter statt. In den vorhergehenden Diplomarbeiten zu diesem Thema, wie [Blanke 04], hat man sich auch mit der adaptiven Verfeinerung der Gitter im Zweidimensionalen beschäftigt. Somit gäbe es die Möglichkeit, mit diesem Verfahren ähnliche Tests für die Erhaltungssätze mit den divergenzfreien Ansatzfunktionen durchzuführen.
- Weiterhin sind Simulationen für den dreidimensionalen Fall anzustreben. Sucht man nach experimentellen Ergebnissen oder numerischen Auswertungen in der Strömungssimulation, finden sich meist Daten für dreidimensionale Szenarien. Somit würde es sich anbieten, in diesem Bereich die bilinearen und divergenzfreien Ansatzfunktionen gegenüberzustellen. Dabei könnten auch zeitadaptive Gitter einbezogen werden. Theoretische und praktische Vorarbeit dazu wurde bereits in [Krahnke 04] geleistet.
- Oft spielt in der Strömungssimulation auch die Temperatur eine große Rolle. Diese wurde in dieser Arbeit nicht berücksichtigt. Der Übergang zur Energiegleichung wäre auch eine Erweiterungsmöglichkeit zu unserem Simulationsthema.

Anhang A

Erklärung der Zeichen und Abkürzungen

Ω	Fluidgebiet, Teilmenge des \mathbb{R}^2
$\Gamma = \partial\Omega$	Rand des Gebietes Ω
x_1	erste Ortskomponente
x_2	zweite Ortskomponente
t	Zeit
$\mathbf{u} = (u_1 \ u_2)^T$	Geschwindigkeitsvektor
u_1	Geschwindigkeitskomponente in x_1 -Richtung
u_2	Geschwindigkeitskomponente in x_2 -Richtung
u_n	Geschwindigkeitskomponente in Normalenrichtung
$u_{\perp n}$	Geschwindigkeitskomponente in Tangentialrichtung
Γ_D	Dirichletrand des Gebietes Ω
n	äußere Normale
Γ_N	Neumannrand des Gebietes Ω
μ	dynamische Viskosität
\mathbf{n}	Normalenvektor
p	Druck
\vec{F}	physikalische Kraft am Rand
\vec{f}	Pseudokraft am Rand
f_n	Pseudokraftkomponente in Normalenrichtung

$f_{\perp n}$	Pseudokraftkomponente in Tangentialrichtung
Re	Reynoldszahl
$\rho(x_1, x_2, t) := \rho$	Dichte
\mathbf{g}	Volumenkräfte
σ	Spannungstensor zweiter Stufe
E	kinetische Energie
t_0	nullter Zeitschritt
t_{end}	letzter Zeitschritt
$\nu = \frac{\mu}{\rho}$	kinematische Viskosität
$\bar{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{\rho}$	kinematischer Druck
\mathbf{u}_h	diskreter Geschwindigkeitsvektor
\mathbf{p}_h	diskreter Druck
\mathbf{A}	Massenmatrix der diskreten Navier-Stokes Gleichungen
$\mathbf{C}(\mathbf{u})$	Konvektionsmatrix
\mathbf{D}	Diffusionsmatrix
\mathbf{M}	Divergenzoperator
Δt	Zeitschrittweite
h	Breite der quadratischen Zellen
$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$	allgemeine Ansatzfunktion
$\tilde{\mathbf{A}}$	gelumppte Massenmatrix
Ψ_i	i-te bilineare Ansatzfunktion
$\Phi = \left(\Phi_{N+i} \right), i = 1, \dots, N$	divergenzfreie Ansatzfunktion
$\mathbf{Q} = \mathbf{M}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{M}^T$	Term der Druck-Poissongleichung
$\mathbf{F} = \mathbf{C}(\mathbf{u})\mathbf{u} + \mathbf{D}\mathbf{u}$	Kraftanteil der diskreten Impulsgleichung
\mathbf{f}	Kraft am Dirichletrand
$\tilde{\mathbf{F}}$	Reaktionskraft am Dirichletrand
H_i	Hutfunktion für den i -ten Knoten
A_{Γ_D}	Massenmatrix für den Dirichletrand
\tilde{A}_{Γ_D}	gelumppte Massenmatrix für den Dirichletrand
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	Skalarprodukt der beiden Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b}
$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}$	erste partielle Ableitung von \mathbf{a} nach x
$\nabla \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_2} \end{pmatrix}$	Gradient von $\mathbf{a} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial n} = \nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$	Ableitung von \mathbf{a} in Richtung der äußeren Normalen

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

Divergenz von $\mathbf{u} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\Delta \mathbf{a} = \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial x_2^2}$$

Laplaceoperator von $\mathbf{a} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\partial}{\partial t}$$

Zeitableitung

$$(\cdot)^e$$

Kennzeichnung einer lokalen Darstellung

ANHANG A. ERKLÄRUNG DER ZEICHEN UND ABKÜRZUNGEN

Anhang B

Mass lumping der Massenmatrix \mathbf{A}

Im Normalfall sieht die lokale Massenmatrix \mathbf{A} so aus:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \mathbf{u} \phi(j) dx &= \sum_i \mathbf{u}(i) \int_{\Omega} \phi(i) \phi(j) dx \\ &= \sum_i \mathbf{u}(i) \int_{\Omega} \phi_1(i) \phi_1(j) + \phi_2(i) \phi_2(j) dx \\ &=: \mathbf{A} \mathbf{u}\end{aligned}$$

Da diese Matrix in unserem Programm des öftern invertiert zum Einsatz kommt, wird \mathbf{A} auf eine einfachere, meist diagonale, Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ abgeändert. Die Methode dafür nennt man „mass lumping“.

Es gibt mehrere Möglichkeiten dies zu tun. Nach [Felippa 04] gibt es drei Methoden, die der gelumpten Matrix Eigenschaften, wie Symmetrie, positive Definitheit, Erhaltung der Gesamtmasse und Wiedergabe der Elementsymmetrien geben sollen:

- Wenn der Testraum gleich dem Ansatzraum ist und die Massenmatrix durch einen Variationsansatz berechnet wird, nennt sich das Ganze direct stiffness method und gehört zum *variational mass lumping*.

- Das *direct mass lumping* entspricht einer Art variational mass lumping, wobei die Freiheitsgrade vollständig anhand des um sie herum befindlichen Raumes entkoppelt werden.
- Die dritte Methode nennt sich *template mass lumping*. Bei dieser wird eine Linearkombination über verschiedene approximierte Massenmatrizen $\tilde{\mathbf{A}}_i$ gebildet:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \sum_{i=1}^k \mu_i \tilde{\mathbf{A}}_i$$

Diese Varianten beziehen sich auf die lokale Massenmatrix, die in unserem Fall gelumpt so aussieht

$$\tilde{\mathbf{A}} = h^2 \cdot \mathbf{I},$$

wobei h der Gitterweite entspricht und \mathbf{I} der passenden Identitätsmatrix.

In [Gresho 98] wird noch eine weitere Möglichkeit des Mass lumping angegeben. Diese bezieht sich allerdings auf die globale Massenmatrix und wird der *direct stiffness method* zugeordnet. Die Matrix soll zu einer Diagonalmatrix approximiert werden, indem man die Einträge der Diagonalen durch die Summe der einzelnen Zeilen berechnet (*row-summing*). Diese Methodik geht unserer Arbeit voraus. Im Anhang befindet sich ein Beispiel einer solchen globalen gelumpten Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ für den 3x3-Fall.

Anhang C

Beispielmatrizen in ihrer globalen Darstellung

C.1 Matrizen für eine 3×3 Nischenströmung

In diesem Abschnitt werden die bilinearen globalen Matrizen \mathbf{D} , $\tilde{\mathbf{A}}$ und $\mathbf{C}(\mathbf{u})$ für ein 3×3 Nischenströmungsszenario im ersten Zeitschritt mit der Reynoldszahl $Re = 1$ angegeben.

Da die gelumppte Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ lediglich Einträge auf ihrer Diagonalen besitzt, werden diese hier in einem Vektor dargestellt. Das selbe Ergebnis erhalten wir auch bei einem 3×3 Kanal egal ob divergenzfreie oder bilineare Elemente verwendet werden. Matrix \mathbf{D} kann wie folgt dargestellt werden:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.1})$$

Bei der Matrix $\mathbf{C}(\mathbf{u})$ befinden sich im bilinearen Fall lediglich Einträge in den Anteilen Zeile 9-16 x Spalte 9-16 und Zeile 25-32 x Spalte 25-32. Dieser Teil der Matrix wird als \mathbf{C}_a notiert.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_l & \tilde{\mathbf{A}}_r \end{pmatrix}, \quad \text{mit}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_l = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.5 & 0.5 & 0.25 & 0.5 & 1 & 1 & 0.5 & 0.5 & 1 & 1 & 0.5 & 0.25 & 0.5 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}, \quad \text{und}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_r = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.5 & 0.5 & 0.25 & 0.5 & 1 & 1 & 0.5 & 0.5 & 1 & 1 & 0.5 & 0.25 & 0.5 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_a = \begin{pmatrix} -0.041667 & 0.041667 & 0 & 0 & -0.041667 & 0.041667 & 0 & 0 \\ -0.041667 & 0 & 0.041667 & 0 & -0.041667 & 0 & 0.041667 & 0 \\ 0 & -0.041667 & 0 & 0.041667 & 0 & -0.041667 & 0 & 0.041667 \\ 0 & 0 & -0.041667 & 0.041667 & 0 & 0 & -0.041667 & 0.041667 \\ -0.041667 & 0.041667 & 0 & 0 & -0.125 & 0.125 & 0 & 0 \\ -0.041667 & 0 & 0.041667 & 0 & -0.125 & 0 & 0.125 & 0 \\ 0 & -0.041667 & 0 & 0.041667 & 0 & -0.125 & 0 & 0.125 \\ 0 & 0 & -0.041667 & 0.041667 & 0 & 0 & -0.125 & 0.125 \end{pmatrix}$$

C.2 Matrizen für einen 3x3 Freien Kanal

In diesem Kapitel werden lediglich die Diffusionsmatrix und die Konvektionsmatrix für einen 3x3 freien Kanal angegeben, denn die gelumpete Massenmatrix entspricht der aus dem vorhergehenden Abschnitt.

C.2.1 Beispiele für divergenzfreie Ansatzfunktionen

Als erstes wollen wir die globale Darstellung der Matrizen \mathbf{D} und $\mathbf{C}(\mathbf{u})$ für die divergenzfreien Ansatzfunktionen angeben. Die Matrix $\mathbf{C}(\mathbf{u})$ wird aus Platzgründen in ihren linken und rechten Anteil unterteilt

$$\mathbf{C}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_l(\mathbf{u}) & \mathbf{C}_r(\mathbf{u}) \end{pmatrix}$$

und die Matrix \mathbf{D} kann wieder, wie in Gleichung C.1 geschrieben werden.

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} & 0 & 0 - \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 - \frac{1}{2} & 0 & 0 - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 - \frac{1}{2} & 2 - \frac{1}{2} & 0 & 0 - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 - \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 - \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 2 - 1 & 0 & 0 - \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 - 1 & 0 & 0 - 1 & 4 - 1 & 0 & 0 - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 - 1 & 0 & 0 - 1 & 4 - 1 & 0 & 0 - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 - \frac{1}{2} & 0 & 0 - 1 & 2 & 0 & 0 & 0 - \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 - \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 2 - 1 & 0 & 0 - \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 - 1 & 0 & 0 - 1 & 4 - 1 & 0 & 0 - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 - 1 & 0 & 0 - 1 & 4 - 1 & 0 & 0 - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 - \frac{1}{2} & 0 & 0 - 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 - \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 - \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 - 1 & 0 & 0 - \frac{1}{2} & 2 - \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 - 1 & 0 & 0 - \frac{1}{2} & 2 - \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 - \frac{1}{2} & 0 & 0 - \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

100

C.2. MATRIZEN FÜR EINEN 3X3 FREIEN KANAL

$$\mathbf{C}_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.041667 & 0.027778 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.027778 & -0.013889 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.041667 & -0.055556 & 0 & 0 & 0 & -0.083333 & 0.083333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.013889 & 0 & 0 & 0 & 0.027778 & -0.027778 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.083333 & -0.083333 & 0 & 0 & 0 & -0.041667 & 0.055556 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.027778 & 0.027778 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.013889 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.041667 & -0.027778 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.027778 & 0.013889 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.013889 & 0.041667 & 0 & -0.055556 & 0.027778 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.013889 & 0.041667 & 0 & -0.027778 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.027778 & 0.055556 & 0 & -0.26389 & 0.23611 & 0 & -0.083333 & 0.083333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.027778 & 0 & -0.15278 & 0.125 & 0 & -0.027778 & 0.027778 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.083333 & 0.083333 & 0 & -0.26389 & 0.23611 & 0 & -0.027778 & 0.055556 \\ 0 & 0 & 0 & -0.027778 & 0.027778 & 0 & -0.15278 & 0.125 & 0 & 0 & 0.027778 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.055556 & 0.027778 & 0 & -0.013889 & 0.041667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.027778 & 0 & 0 & -0.013889 & 0.041667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

C.2.2 Beispiele für bilineare Ansatzfunktionen

Bei den Matrizen für den freien Kanal, die aus den bilinearen Ansatzfunktionen errechnet werden, kann \mathbf{D} wieder wie in Gleichung C.1 dargestellt werden und $\mathbf{C}(\mathbf{u})$ wird ebenfalls so eingeteilt:

$$\mathbf{C}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1(\mathbf{u}) & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_1(\mathbf{u}) \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} -0.037037 & 0.037037 & 0 & 0 & -0.037037 & 0.037037 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.018519 & 0.018519 & 0 & 0 & -0.018519 & 0.018519 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.037037 & 0.037037 & 0 & 0 & -0.25926 & 0.25926 & 0 & 0 & -0.074074 & 0.074074 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.018519 & 0.018519 & 0 & 0 & -0.12963 & 0.12963 & 0 & 0 & -0.037037 & 0.037037 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.074074 & 0.074074 & 0 & 0 & -0.25926 & 0.25926 & 0 & 0 & -0.037037 & 0.037037 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.037037 & 0.037037 & 0 & 0 & -0.12963 & 0.12963 & 0 & 0 & -0.018519 & 0.018519 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.037037 & 0.037037 & 0 & 0 & -0.037037 & 0.037037 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.018519 & 0.018519 & 0 & 0 & -0.018519 & 0.018519 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Anhang D

Kraft-Tabellen

Die berechnete Kraft, sollte bei divergenzfreien und bilinearen Ansatzfunktionen im gleichen Bereich liegen. Dieser sollte sich in unseren 3×3 und 4×4 Beispielszenarien des freien Kanals in der gleichen Größe der L2-Norm von der Geschwindigkeitsdifferenz und der Druckdifferenz jeweiliger Zeitschritte befinden. Das Ergebnis darf um 2 Potenzen schwanken. Im stationären Fall erwarten wir 0 als Resultat für die Kraft.

Die Tabellen D.1 bis D.4 zeigen unsere Ergebnisse für beide Ansatzfunktionen für die zwei Kanäle mit dem vollen Einströmprofil zum Zeitschritt 0. Die Tabellen D.5 und D.7 zeigen die Ergebnisse für die divergenzfreien Ansatzfunktionen mit dem Aufbau des vollen Einströmprofils über zehn Zeitschritte. Da die bilinearen Ansatzfunktionen in diesem Fall zu Anfang kaum einen Unterschied zu den divergenzfreien aufweisen, zeigen wir für diese nur den 99ten Zeitschritt für dieses Szenario in den Tabellen D.6 und D.8.

3x3 freier Kanal mit divergenzfreien Ansatzfunktionen volles Einströmprofil nach 0 Zeitschritten $Re = 1$, $\Delta t = 0.01$			
<i>Zeitschritt t</i>	$\frac{\ \mathbf{u}^{(t-1)} - \mathbf{u}^{(t)}\ _{L_2}}{\ \mathbf{u}^{(t)}\ _{L_2}}$	$\frac{\ \mathbf{p}^{(t-1)} - \mathbf{p}^{(t)}\ _{L_2}}{\ \mathbf{p}^{(t)}\ _{L_2}}$	<i>Kraft</i>
0	1	1	$\begin{pmatrix} -73.6667 & 0 \end{pmatrix}$
1	0.1325	5.7000	$\begin{pmatrix} -36.7994 & 0 \end{pmatrix}$
2	0.0644	0.9005	$\begin{pmatrix} -18.3912 & 0 \end{pmatrix}$
3	0.0317	0.8157	$\begin{pmatrix} -9.1935 & 0 \end{pmatrix}$
4	0.0157	0.6844	$\begin{pmatrix} -4.5962 & 0 \end{pmatrix}$
5	0.0078	0.5146	$\begin{pmatrix} -2.2980 & 0 \end{pmatrix}$
6	0.0039	0.3416	$\begin{pmatrix} -1.1490 & 0 \end{pmatrix}$
7	0.0020	0.2033	$\begin{pmatrix} -0.5745 & 0 \end{pmatrix}$
8	$9.7704 \cdot 10^{-4}$	0.1120	$\begin{pmatrix} -0.2872 & 0 \end{pmatrix}$
9	$4.8840 \cdot 10^{-4}$	0.0590	$\begin{pmatrix} -0.1436 & 0 \end{pmatrix}$
10	$2.4417 \cdot 10^{-4}$	0.0303	$\begin{pmatrix} -0.0718 & 0 \end{pmatrix}$
11	$1.2208 \cdot 10^{-4}$	0.0154	$\begin{pmatrix} -0.0359 & 0 \end{pmatrix}$
12	$6.1037 \cdot 10^{-5}$	0.0077	$\begin{pmatrix} -0.0180 & 0 \end{pmatrix}$
13	$3.0518 \cdot 10^{-5}$	0.0039	$\begin{pmatrix} -0.0090 & 0 \end{pmatrix}$
14	$1.5259 \cdot 10^{-5}$	0.0019	$\begin{pmatrix} -0.0045 & 0 \end{pmatrix}$
15	$7.6294 \cdot 10^{-6}$	$9.7187 \cdot 10^{-4}$	$\begin{pmatrix} -0.0022 & 0 \end{pmatrix}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
99	$1.7680 \cdot 10^{-18}$	$1.8000 \cdot 10^{-16}$	$\begin{pmatrix} -0.1776 & -0.0078 \end{pmatrix} \cdot 10^{-13}$

Tabelle D.1: Kraftmessungen und L_2 -Norm von Geschwindigkeit und Druck für einen 3x3 freien Kanal mit divergenzfreien Ansatzfunktionen. Das volle Einströmprofil ist nach dem 0-ten Zeitschritt erreicht, die Reynolds-Zahl Re ist 1 und die Zeitschrittweite Δt ist 0.01.

3x3 freier Kanal mit bilinearen Ansatzfunktionen volles Einströmprofil nach 0 Zeitschritten $Re = 1$, $\Delta t = 0.01$			
<i>Zeitschritt t</i>	$\frac{\ \mathbf{u}^{(t-1)} - \mathbf{u}^{(t)}\ _{L_2}}{\ \mathbf{u}^{(t)}\ _{L_2}}$	$\frac{\ \mathbf{p}^{(t-1)} - \mathbf{p}^{(t)}\ _{L_2}}{\ \mathbf{p}^{(t)}\ _{L_2}}$	<i>Kraft</i>
0	1	1	$\begin{pmatrix} -73.7037 & 0 \end{pmatrix}$
1	0.1325	5.6940	$\begin{pmatrix} -36.8210 & 0 \end{pmatrix}$
2	0.0644	0.9007	$\begin{pmatrix} -18.4028 & 0 \end{pmatrix}$
3	0.0317	0.8161	$\begin{pmatrix} -9.1995 & 0 \end{pmatrix}$
4	0.0157	0.6851	$\begin{pmatrix} -4.5992 & 0 \end{pmatrix}$
5	0.0078	0.5154	$\begin{pmatrix} -2.2995 & 0 \end{pmatrix}$
6	0.0039	0.3422	$\begin{pmatrix} -1.1497 & 0 \end{pmatrix}$
7	0.0020	0.2037	$\begin{pmatrix} -0.5749 & 0 \end{pmatrix}$
8	$9.7704 \cdot 10^{-4}$	0.1123	$\begin{pmatrix} -0.2874 & 0 \end{pmatrix}$
9	$4.8840 \cdot 10^{-4}$	0.0591	$\begin{pmatrix} -0.1437 & 0 \end{pmatrix}$
10	$2.4417 \cdot 10^{-4}$	0.0304	$\begin{pmatrix} -0.0719 & 0 \end{pmatrix}$
11	$1.2208 \cdot 10^{-4}$	0.0154	$\begin{pmatrix} -0.0359 & 0 \end{pmatrix}$
12	$6.1037 \cdot 10^{-5}$	0.0077	$\begin{pmatrix} -0.0180 & 0 \end{pmatrix}$
13	$3.0518 \cdot 10^{-5}$	0.0039	$\begin{pmatrix} -0.0090 & 0 \end{pmatrix}$
14	$1.5259 \cdot 10^{-5}$	0.0019	$\begin{pmatrix} -0.0045 & 0 \end{pmatrix}$
15	$7.6294 \cdot 10^{-6}$	$9.7404 \cdot 10^{-4}$	$\begin{pmatrix} -0.0022 & 0 \end{pmatrix}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
99	$8.0257 \cdot 10^{-19}$	$1.3875 \cdot 10^{-16}$	$\begin{pmatrix} -0.8882 & -0.0056 \end{pmatrix} \cdot 10^{-14}$

Tabelle D.2: Kraftmessungen und L_2 -Norm von Geschwindigkeit und Druck für einen 3x3 freien Kanal mit bilinearen Ansatzfunktionen. Das volle Einströmprofil ist nach dem 0-ten Zeitschritt erreicht, die Reynolds-Zahl Re ist 1 und die Zeitschrittweite Δt ist 0.01.

4x4 freier Kanal mit divergenzfreien Ansatzfunktionen volles Einströmprofil nach 0 Zeitschritten $Re = 1$, $\Delta t = 0.005$			
<i>Zeitschritt t</i>	$\frac{\ \mathbf{u}^{(t-1)} - \mathbf{u}^{(t)}\ _{L_2}}{\ \mathbf{u}^{(t)}\ _{L_2}}$	$\frac{\ \mathbf{p}^{(t-1)} - \mathbf{p}^{(t)}\ _{L_2}}{\ \mathbf{p}^{(t)}\ _{L_2}}$	<i>Kraft</i>
0	1	1	$\begin{pmatrix} -58.1420 & 0 \end{pmatrix}$
1	0.1169	7.6865	$\begin{pmatrix} -29.0191 & 0 \end{pmatrix}$
2	0.0574	0.8517	$\begin{pmatrix} -14.4839 & 0 \end{pmatrix}$
3	0.0288	0.7375	$\begin{pmatrix} -7.2231 & 0 \end{pmatrix}$
4	0.0150	0.5796	$\begin{pmatrix} -3.5948 & 0 \end{pmatrix}$
5	0.0086	0.4039	$\begin{pmatrix} -1.7814 & 0 \end{pmatrix}$
6	0.0059	0.2510	$\begin{pmatrix} -0.8752 & 0 \end{pmatrix}$
7	0.0048	0.1434	$\begin{pmatrix} -0.4225 & 0 \end{pmatrix}$
8	0.0043	0.0782	$\begin{pmatrix} -0.1965 & 0 \end{pmatrix}$
9	0.0040	0.0419	$\begin{pmatrix} -0.0839 & 0 \end{pmatrix}$
10	0.0038	0.0227	$\begin{pmatrix} -0.0280 & 0 \end{pmatrix}$
11	0.0036	0.0128	$\begin{pmatrix} -0.3885 \cdot 10^{-3} & 0 \end{pmatrix}$
12	0.0034	0.0078	$\begin{pmatrix} 0.0130 & 0 \end{pmatrix}$
13	0.0032	0.0052	$\begin{pmatrix} 0.0194 & 0 \end{pmatrix}$
14	0.0030	0.0039	$\begin{pmatrix} 0.0222 & 0 \end{pmatrix}$
15	0.0029	0.0032	$\begin{pmatrix} 0.0233 & 0 \end{pmatrix}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
99	$8.3057 \cdot 10^{-5}$	$4.9317 \cdot 10^{-5}$	$\begin{pmatrix} 0.0014 & 0 \end{pmatrix}$

Tabelle D.3: Kraftmessungen und L_2 -Norm von Geschwindigkeit und Druck für einen 4x4 freien Kanal mit divergenzfreien Ansatzfunktionen. Das volle Einströmprofil ist nach dem 0-ten Zeitschritt erreicht, die Reynolds-Zahl Re ist 1 und die Zeitschrittweite Δt ist 0.005.

4x4 freier Kanal mit bilinearen Ansatzfunktionen volles Einströmprofil nach 0 Zeitschritten $Re = 1$, $\Delta t = 0.005$			
<i>Zeitschritt t</i>	$\frac{\ \mathbf{u}^{(t-1)} - \mathbf{u}^{(t)}\ _{L_2}}{\ \mathbf{u}^{(t)}\ _{L_2}}$	$\frac{\ \mathbf{p}^{(t-1)} - \mathbf{p}^{(t)}\ _{L_2}}{\ \mathbf{p}^{(t)}\ _{L_2}}$	<i>Kraft</i>
0	1	1	$\begin{pmatrix} -58.1632 & 0 \end{pmatrix}$
1	0.1168	7.6777	$\begin{pmatrix} -29.0302 & 0 \end{pmatrix}$
2	0.0574	0.8521	$\begin{pmatrix} -14.4887 & 0 \end{pmatrix}$
3	0.0287	0.7382	$\begin{pmatrix} -7.2245 & 0 \end{pmatrix}$
4	0.0149	0.5803	$\begin{pmatrix} -3.5943 & 0 \end{pmatrix}$
5	0.0084	0.4044	$\begin{pmatrix} -1.7801 & 0 \end{pmatrix}$
6	0.0056	0.2513	$\begin{pmatrix} -0.8735 & 0 \end{pmatrix}$
7	0.0046	0.1435	$\begin{pmatrix} -0.4207 & 0 \end{pmatrix}$
8	0.0041	0.0782	$\begin{pmatrix} -0.1947 & 0 \end{pmatrix}$
9	0.0038	0.0419	$\begin{pmatrix} -0.0821 & 0 \end{pmatrix}$
10	0.0036	0.0227	$\begin{pmatrix} -0.0262 & 0 \end{pmatrix}$
11	0.0035	0.0127	$\begin{pmatrix} 0.0014 & 0 \end{pmatrix}$
12	0.0033	0.0077	$\begin{pmatrix} 0.0148 & 0 \end{pmatrix}$
13	0.0031	0.0051	$\begin{pmatrix} 0.0212 & 0 \end{pmatrix}$
14	0.0030	0.0038	$\begin{pmatrix} 0.0240 & 0 \end{pmatrix}$
15	0.0028	0.0031	$\begin{pmatrix} 0.0250 & 0 \end{pmatrix}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
99	$1.1470 \cdot 10^{-4}$	$5.1984 \cdot 10^{-5}$	$\begin{pmatrix} 0.0029 & 0 \end{pmatrix}$

Tabelle D.4: Kraftmessungen und L_2 -Norm von Geschwindigkeit und Druck für einen 4x4 freien Kanal mit bilinearen Ansatzfunktionen. Das volle Einströmprofil ist nach dem 0-ten Zeitschritt erreicht, die Reynolds-Zahl Re ist 1 und die Zeitschrittweite Δt ist 0.005.

3x3 freier Kanal mit divergenzfreien Ansatzfunktionen volles Einströmprofil nach 10 Zeitschritten $Re = 1$, $\Delta t = 0.01$			
<i>Zeitschritt t</i>	$\frac{\ \mathbf{u}^{(t-1)} - \mathbf{u}^{(t)}\ _{L_2}}{\ \mathbf{u}^{(t)}\ _{L_2}}$	$\frac{\ \mathbf{p}^{(t-1)} - \mathbf{p}^{(t)}\ _{L_2}}{\ \mathbf{p}^{(t)}\ _{L_2}}$	<i>Kraft</i>
0	NaN	NaN	$\begin{pmatrix} -74.0686 & 0 \end{pmatrix}$
1	1	1	$\begin{pmatrix} -81.4611 & 0 \end{pmatrix}$
2	0.5125	0.1339	$\begin{pmatrix} -85.1448 & 0 \end{pmatrix}$
3	0.3457	0.0661	$\begin{pmatrix} -86.9747 & 0 \end{pmatrix}$
4	0.2600	0.0351	$\begin{pmatrix} -87.8781 & 0 \end{pmatrix}$
5	0.2078	0.0204	$\begin{pmatrix} -88.3186 & 0 \end{pmatrix}$
6	0.1726	0.0133	$\begin{pmatrix} -88.5279 & 0 \end{pmatrix}$
7	0.1475	0.0099	$\begin{pmatrix} -88.6216 & 0 \end{pmatrix}$
8	0.1287	0.0082	$\begin{pmatrix} -88.6575 & 0 \end{pmatrix}$
9	0.1141	0.0074	$\begin{pmatrix} -88.6646 & 0 \end{pmatrix}$
10	0.1024	0.0070	$\begin{pmatrix} -14.6972 & 0 \end{pmatrix}$
11	0.0253	2.6814	$\begin{pmatrix} -7.3473 & 0 \end{pmatrix}$
12	0.0126	0.6325	$\begin{pmatrix} -3.6733 & 0 \end{pmatrix}$
13	0.0063	0.4569	$\begin{pmatrix} -1.8366 & 0 \end{pmatrix}$
14	0.0031	0.2919	$\begin{pmatrix} -0.9183 & 0 \end{pmatrix}$
15	0.0016	0.1688	$\begin{pmatrix} -0.4591 & 0 \end{pmatrix}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
99	$1.8836 \cdot 10^{-18}$	$3.3148 \cdot 10^{-16}$	$\begin{pmatrix} -0.3908 & -0.0013 \end{pmatrix} \cdot 10^{-13}$

Tabelle D.5: Kraftmessungen und L_2 -Norm von Geschwindigkeit und Druck für einen 3x3 freien Kanal mit divergenzfreien Ansatzfunktionen. Das volle Einströmprofil ist nach dem 10-ten Zeitschritt erreicht, die Reynolds-Zahl Re ist 1 und die Zeitschrittweite Δt ist 0.01.

3x3 freier Kanal mit bilinearen Ansatzfunktionen volles Einströmprofil nach 10 Zeitschritten $Re = 1$, $\Delta t = 0.01$			
<i>Zeitschritt t</i>	$\frac{ \mathbf{u}^{(t-1)} - \mathbf{u}^{(t)} _{L_2}}{ \mathbf{u}^{(t)} _{L_2}}$	$\frac{ \mathbf{p}^{(t-1)} - \mathbf{p}^{(t)} _{L_2}}{ \mathbf{p}^{(t)} _{L_2}}$	<i>Kraft</i>
99	$1.4468 \cdot 10^{-18}$	$3.3077 \cdot 10^{-16}$	$\begin{pmatrix} -0.1954 & 0.0022 \end{pmatrix} \cdot 10^{-13}$

Tabelle D.6: Kraftmessungen und L_2 -Norm von Geschwindigkeit und Druck für den 99ten Zeitschritt eines 3x3 freien Kanal mit bilinearen Ansatzfunktionen. Das volle Einströmprofil ist nach dem 10-ten Zeitschritt erreicht, die Reynolds-Zahl Re ist 1 und die Zeitschrittweite Δt ist 0.01.

4x4 freier Kanal mit divergenzfreen Ansatzfunktionen volles Einströmprofil nach 10 Zeitschritten $Re = 1$, $\Delta t = 0.005$			
<i>Zeitschritt t</i>	$\frac{\ \mathbf{u}^{(t-1)} - \mathbf{u}^{(t)}\ _{L_2}}{\ \mathbf{u}^{(t)}\ _{L_2}}$	$\frac{\ \mathbf{p}^{(t-1)} - \mathbf{p}^{(t)}\ _{L_2}}{\ \mathbf{p}^{(t)}\ _{L_2}}$	<i>Kraft</i>
0	NaN	NaN	$\begin{pmatrix} -82.0256 & 0 \end{pmatrix}$
1	1	1	$\begin{pmatrix} -87.8690 & 0 \end{pmatrix}$
2	0.5096	0.1059	$\begin{pmatrix} -90.7769 & 0 \end{pmatrix}$
3	0.3429	0.0543	$\begin{pmatrix} -92.2172 & 0 \end{pmatrix}$
4	0.2578	0.0303	$\begin{pmatrix} -92.9239 & 0 \end{pmatrix}$
5	0.2061	0.0188	$\begin{pmatrix} -93.2639 & 0 \end{pmatrix}$
6	0.1714	0.0133	$\begin{pmatrix} -93.4203 & 0 \end{pmatrix}$
7	0.1466	0.0106	$\begin{pmatrix} -93.4847 & 0 \end{pmatrix}$
8	0.1280	0.0092	$\begin{pmatrix} -93.5029 & 0 \end{pmatrix}$
9	0.1135	0.0085	$\begin{pmatrix} -93.4978 & 0 \end{pmatrix}$
10	0.1020	0.0081	$\begin{pmatrix} -11.5692 & 0 \end{pmatrix}$
11	0.0230	3.1954	$\begin{pmatrix} -5.7675 & 0 \end{pmatrix}$
12	0.0121	0.5246	$\begin{pmatrix} -2.8681 & 0 \end{pmatrix}$
13	0.0071	0.3518	$\begin{pmatrix} -1.4190 & 0 \end{pmatrix}$
14	0.0050	0.2119	$\begin{pmatrix} -0.6949 & 0 \end{pmatrix}$
15	0.0042	0.1187	$\begin{pmatrix} -0.3332 & 0 \end{pmatrix}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
99	$1.0291 \cdot 10^{-4}$	$6.2430 \cdot 10^{-5}$	$\begin{pmatrix} 0.0018 & 0 \end{pmatrix}$

Tabelle D.7: Kraftmessungen und L_2 -Norm von Geschwindigkeit und Druck für einen 4x4 freien Kanal mit divergenzfreen Ansatzfunktionen. Das volle Einströmprofil ist nach dem 10-ten Zeitschritt erreicht, die Reynolds-Zahl Re ist 1 und die Zeitschrittweite Δt ist 0.005.

4x4 freier Kanal mit bilinearen Ansatzfunktionen volles Einströmprofil nach 10 Zeitschritten $Re = 1$, $\Delta t = 0.005$			
<i>Zeitschritt t</i>	$\frac{\ \mathbf{u}^{(t-1)} - \mathbf{u}^{(t)}\ _{L_2}}{\ \mathbf{u}^{(t)}\ _{L_2}}$	$\frac{\ \mathbf{p}^{(t-1)} - \mathbf{p}^{(t)}\ _{L_2}}{\ \mathbf{p}^{(t)}\ _{L_2}}$	<i>Kraft</i>
99	$1.3463 \cdot 10^{-4}$	$6.6471 \cdot 10^{-5}$	$\begin{pmatrix} 0.0033 & 0 \end{pmatrix}$

Tabelle D.8: Kraftmessungen und L_2 -Norm von Geschwindigkeit und Druck für den 99ten Zeitschritt eines 4x4 freien Kanal mit bilinearen Ansatzfunktionen. Das volle Einströmprofil ist nach dem 0-ten Zeitschritt erreicht, die Reynolds-Zahl Re ist 1 und die Zeitschrittweite Δt ist 0.005.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Darstellung der Geometrie einer zweidimensionalen Nischenströmung . . .	9
2.2	Nischenströmungsmodelle mit konstanter Anfangsgeschwindigkeit für unterschiedliche Fluide ($Re = 1$ und $Re = 1000$).	11
2.3	Nischenströmungsmodelle mit konstanter Anfangsgeschwindigkeit für unterschiedliche Fluide ($Re = 1$ und $Re = 1000$).	11
2.4	Nischenströmungsmodelle mit nicht konstanter Anfangsgeschwindig- keit für ein Fluid mit $Re = 1$	12
2.5	Nischenströmungsmodelle mit nicht konstanter Anfangsgeschwindig- keit für ein Fluid mit $Re = 1000$	12
2.6	Darstellung der Geometrie eines zweidimensionalen freien Kanals . . .	13
2.7	Modell eines freien Kanals für ein Fluid mit $Re = 1$	14
2.8	Modell eines freien Kanals für ein Fluid mit $Re = 20$	14
2.9	Darstellung der Geometrie eines zweidimensionalen Kanals mit Zylinder	15
2.10	Modell eines Kanals mit Zylinder für ein Fluid mit $Re = 20$	16
2.11	Modell eines Kanals mit Zylinder für ein Fluid mit $Re = 100$	16
5.1	Teilweise versetztes Gitter auf einer Zelle	32
5.2	Bilineare Basisfunktion Ψ_i und ihr Träger	37
5.3	Darstellung der divergenzfreien Ansatzfunktionen auf einem lokalen Träger.	41
5.4	Lokaler Träger der divergenzfreien Ansatzfunktionen für die Geschwin- digkeiten u_1 in x_1 -Richtung.	41

5.5	Zelle als ein Gebiet Ω^e betrachtet mit ihren speziellen Bezeichnungen zur Berechnung der lokalen Divergenzmatrix \mathbf{M}^e	43
6.1	Globale Zellen- und Knotennummerierung anhand eines Beispiels. . . .	54
6.2	Zellnummerierung für eine lokal betrachtete Zelle.	54
6.3	Beispielszenario zur Berechnung einer globalen Matrix.	55
6.4	Randknotenkennzeichnung an einem Beispiel	61
6.5	Die Konvektionsmatrix $\mathbf{C}(\mathbf{u})$ für ein 2×2 Nischenströmungsszenario. . .	61
6.6	Die Konvektionsmatrix $\mathbf{C}(\mathbf{u})$ aus Abbildung 6.5 mit zu Null gesetzten Dirichlet-Randknotenelementen.	62
6.7	Hütchenfunktion: zweidimensionale Ansatzfunktion für die Berechnung der Massenmatrix am Rand Γ_D	70
6.8	Ausschnitt der Hütchenfunktion für eine Randkante der Länge h	71
6.9	Integrationswerte für einen Dirichletknoten von zwei Randkanten . . .	72
6.10	Energie und ihre einzelnen Anteile für ein 4×4 Nischenströmungsszenario mit konstanter Eingangsgeschwindigkeit $Re=200$ und $TS=10000$ mit bilinearen Ansatzfunktionen	77
6.11	Energie und ihre einzelnen Anteile für ein 4×4 Nischenströmungsszenario mit konstanter Eingangsgeschwindigkeit $Re=200$ und $TS=10000$ mit divergenzfreien Ansatzfunktionen	78
6.12	Energie und ihre einzelnen Anteile für ein 4×4 Nischenströmungsszenario mit nicht-konstanter Eingangsgeschwindigkeit mit $Re=200$ und $TS=10000$ mit bilinearen Ansatzfunktionen	80
6.13	Energie und ihre einzelnen Anteile für ein 4×4 Nischenströmungsszenario mit nicht-konstanter Eingangsgeschwindigkeit mit $Re=200$ und $TS=10000$ mit divergenzfreien Ansatzfunktionen	81
6.14	Energie und ihre einzelnen Anteile für einen 4×4 freien Kanal mit $Re=200$ und $TS=5000$ mit bilinearen Ansatzfunktionen	82
6.15	Energie und ihre einzelnen Anteile für einen 4×4 freien Kanal mit $Re=200$ und $TS=5000$ mit divergenzfreien Ansatzfunktionen	83
6.16	Energie und ihre einzelnen Anteile für ein 4×4 Kanal mit Zylinder mit $Re=20$ und $TS=2000$ mit bilinearen Ansatzfunktionen	85

6.17	Energie und ihre einzelnen Anteile für ein 4x4 Kanal mit Zylinder mit Re=20 und TS=2000 mit divergenzfreen Ansatzfunktionen	86
------	--	----

Tabellenverzeichnis

6.1	Vergleich der gelumpten Massenmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ mit den echten Matrizen \mathbf{A} der verschiedenen Ansatzfunktionen.	59
6.2	Checkliste der Matrizen-Tests für die divergenzfreien Ansatzfunktionen	64
6.3	Checkliste der Matrizen-Tests für die bilinearen Ansatzfunktionen . . .	64
6.4	Testergebnisse zur Überprüfung unserer These aus Gleichung 6.20. . .	74
6.5	Massenmatrix \mathbf{A}_{Γ_D} und ihre gelumpte Version $\tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_D}$ im Vergleich . . .	75
6.6	Einzelne Energievariablen für den Zeitschritt 10000 und Reynoldszahl 200 für das Nischenströmungsszenario (DC) mit konstanter Geschwin- digkeit am Eingang für beide Ansatzfunktionen.	76
6.7	Einzelne Energievariablen für den Zeitschritt 10000 und Reynoldszahl 200 für das Nischenströmungsszenario (DC) ohne konstanter Geschwin- digkeit am Eingang für beide Ansatzfunktionen.	79
6.8	Einzelne Energievariablen für den Zeitschritt 5000 und Reynoldszahl 200 für den freien Kanal (FC) mit parabolischer Geschwindigkeit am Eingang für beide Ansatzfunktionen.	79
6.9	Einzelne Energievariablen für den Zeitschritt 500 und Reynoldszahl 20 für den Kanal mit Zylinder mit parabolischer Geschwindigkeit am Eingang für beide Ansatzfunktionen.	84
6.10	Einzelne Energievariablen für den Zeitschritt 2000 und Reynoldszahl 20 für den Kanal mit Zylinder mit parabolischer Geschwindigkeit am Eingang für beide Ansatzfunktionen.	84

TABELLENVERZEICHNIS

D.1	Kraftmessungen und L_2 -Norm von Geschwindigkeit und Druck für einen 3×3 freien Kanal mit divergenzfreien Ansatzfunktionen. Das volle Einströmprofil ist nach dem 0-ten Zeitschritt erreicht, die Reynolds-Zahl Re ist 1 und die Zeitschrittweite Δt ist 0.01.	104
D.2	Kraftmessungen und L_2 -Norm von Geschwindigkeit und Druck für einen 3×3 freien Kanal mit bilinearen Ansatzfunktionen. Das volle Einströmprofil ist nach dem 0-ten Zeitschritt erreicht, die Reynolds-Zahl Re ist 1 und die Zeitschrittweite Δt ist 0.01.	105
D.3	Kraftmessungen und L_2 -Norm von Geschwindigkeit und Druck für einen 4×4 freien Kanal mit divergenzfreien Ansatzfunktionen. Das volle Einströmprofil ist nach dem 0-ten Zeitschritt erreicht, die Reynolds-Zahl Re ist 1 und die Zeitschrittweite Δt ist 0.005.	106
D.4	Kraftmessungen und L_2 -Norm von Geschwindigkeit und Druck für einen 4×4 freien Kanal mit bilinearen Ansatzfunktionen. Das volle Einströmprofil ist nach dem 0-ten Zeitschritt erreicht, die Reynolds-Zahl Re ist 1 und die Zeitschrittweite Δt ist 0.005.	107
D.5	Kraftmessungen und L_2 -Norm von Geschwindigkeit und Druck für einen 3×3 freien Kanal mit divergenzfreien Ansatzfunktionen. Das volle Einströmprofil ist nach dem 10-ten Zeitschritt erreicht, die Reynolds-Zahl Re ist 1 und die Zeitschrittweite Δt ist 0.01.	108
D.6	Kraftmessungen und L_2 -Norm von Geschwindigkeit und Druck für den 99ten Zeitschritt eines 3×3 freien Kanal mit bilinearen Ansatzfunktionen. Das volle Einströmprofil ist nach dem 10-ten Zeitschritt erreicht, die Reynolds-Zahl Re ist 1 und die Zeitschrittweite Δt ist 0.01.	109
D.7	Kraftmessungen und L_2 -Norm von Geschwindigkeit und Druck für einen 4×4 freien Kanal mit divergenzfreien Ansatzfunktionen. Das volle Einströmprofil ist nach dem 10-ten Zeitschritt erreicht, die Reynolds-Zahl Re ist 1 und die Zeitschrittweite Δt ist 0.005.	110
D.8	Kraftmessungen und L_2 -Norm von Geschwindigkeit und Druck für den 99ten Zeitschritt eines 4×4 freien Kanal mit bilinearen Ansatzfunktionen. Das volle Einströmprofil ist nach dem 0-ten Zeitschritt erreicht, die Reynolds-Zahl Re ist 1 und die Zeitschrittweite Δt ist 0.005.	111

Literaturverzeichnis

- [Batchelor 00] G.K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, New York, 2000
- [Blanke 04] C. Blanke, *Kontinuitätserhaltende Finite-Elemente-Diskretisierung der Navier-Stokes Gleichungen*, Diplomarbeit, Technische Universität München, Fakultät für Informatik, Forschungs- und Lehrereinheit Informatik V, 2004
- [Braess 97] D. Braess, *Finite Elemente: Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*, Springer, Berlin, 1997
- [Chorin 68] A.J. Chorin, *Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations*, Math. Comput., Volume 22, p.745, 1968
- [Felippa 04] C.A. Felippa, *Introduction to Finite Element Methods*, Material assembled from Lecture Notes on the course *Introduction to Finite Elements Methods*(ASEN 5007), Aerospace Engineering Sciences Department, University of Colorado at Boulder, 2004
- [Ferziger 02] J.H. Ferziger, M. Perić, *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer, Berlin, 2002
- [Foias 01] C. Foias, O. Manley, R. Rosa, R. Temam, *Navier-Stokes Equations and Turbulence*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001

- [Gresho 98] P.M. Gresho, R.L. Sani, M.S. Engelman, *Incompressible Flow and the Finite Element Method - Advection-Diffusion and Isothermal Laminar Flow*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 1998
- [Griebel 95] M. Griebel, T. Dornseifer, T. Neunhoffer, *Numerische Simulation in der Strömungsmechanik*, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1995
- [Knabner 00] P. Knabner, L. Angermann, *Numerik partieller Differentialgleichungen*, Springer, Berlin, 2000
- [Krahnke 04] A. Krahnke, *Adaptive Verfahren höherer Ordnung auf cache-optimalen Datenstrukturen für dreidimensionale Probleme*, Dissertation, Technische Universität München, Fakultät für Informatik, Forschungs- und Lehrinheit Informatik V, 2004
- [Larsson 03] S. Larsson, V. Thomée *Partial Differential Equations with Numerical Methods*, Springer, Berlin, 2003
- [Laschka 01] B. Laschka, A. Pechloff, *Fluidmechanik I*, Vorlesungsbegleitendes Manuskript, Technische Universität München, Fakultät für Maschinenwesen, Lehrstuhl für Fluidmechanik, 2001
- [Meschede 2006] D. Meschede, *Gerthsen Physik*, Springer, Berlin, 2006
- [Neckel 08] T. Neckel, *Effiziente Finite-Element-Verfahren zur Strömungssimulation auf kartesischen Gittern*, Dissertation, Technische Universität München, Fakultät für Informatik, Forschungs- und Lehrinheit Informatik V, to appear
- [Neckel 05] T. Neckel, *Einfache 2-D-Fluid-Struktur-Wechselwirkungen mit einer cache-optimalen Finite-Element-Methode*, Diplomarbeit, Technische Universität München, Fakultät für Informatik, Forschungs- und Lehrinheit Informatik V, 2005

- [Panton 05] R.L. Panton, *Incompressible Flow*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, 2005
- [Peyret 83] R. Peyret, T.D. Taylor, *Computational Methods for Fluid Flow*, Springer, Berlin, 1983
- [Reddy 00] J.N. Reddy, D.K. Gartling, *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*, CRC Press, Boca Raton, 2000
- [Schlichting 06] H. Schlichting, K. Gersten, *Grenzschicht-Theorie*, Springer, Berlin, 2006
- [Strang 86] G. Strang, *Introduction to Applied Mathematics*, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, 1986
- [Strang 97] G. Strang, G.J. Fix, *An Analysis of the Finite Element Method*, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, 1997
- [Tome 94] M. Tome, S. McKee, *GENSMAC: A computational marker and cell method for free surface flows in general domains*, Journal of Computational Physics, Volume 110, pp. 171-186, 1994
- [Verstappen 01] R.W.C.P. Verstappen, A.E.P. Veldman, *Symmetry-Preserving Discretization of Turbulent Channel Flow*, erschienen in: M. Breuer, F. Durst, C. Zenger (Eds.), High Performance Scientific and Engineering Computing, Springer, Berlin, 2001
- [Weinzierl 05] T. Weinzierl, *Eine Cache-optimale Implementierung eines Navier-Stokes Lölers unter besonderer Berücksichtigung physikalischer Erhaltungssätze*, Diplomarbeit, Technische Universität München, Fakultät für Informatik, Forschungs- und Lehrereinheit Informatik V, 2005

LITERATURVERZEICHNIS

- [Zienkiewicz 05] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, P. Nithiarasu, *The Finite Element Method for Fluid Dynamics*, Elsevier, Burlington, 2005